TMV166/186 Linjär algebra M och TD, vt 14
Vecko–PM läsvecka 5

Lay: 4.7 Basbyte i vektorrum, 5.1-5.4, 5.7 Egenvärden och egenvektorer

I avsnitt 4.4 infördes koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ för en vektor $\mathbf{x}$ relativt en bas $\mathcal{B}$. *Basbytesmatrien* $P_{\mathcal{B}}$ som ger sambandet $\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ mellan en vektor $\mathbf{x}$ och koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ infördes i samband med exempel 4.4.4. Målet i **4.7** är att beskriva sambandet mellan en vektors koordinatvektorer relativt två olika baser $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$. **Sats 15** säger allt. Beteckningarna är lite jobbiga men samtidigt logiska. Basbytesmatrisen som konverterar $\mathcal{B}$-koordinater till $\mathcal{C}$-koordinater betecknas $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$. Eftersom $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ är det logiskt att pilen går från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{C}$. Riktningen, från höger till vänster, motiveras också om vi ser på upprepade koordinatbyten, först från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{C}$ sedan från $\mathcal{C}$ till $\mathcal{D}$. det sammansatta koordinatbytet från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{D}$ ges av matrisprodukten $\underset{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}{Q} \cdot \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$.
En svårighet är att varje matris kan ha flera tolkningar. I avsnitt **5.4** införs begreppet avbildningsmatris för godtycklig linjär avbildning $V \to W$. Avbildningsmatrisen A överför koordinaterna för en vektor $\mathbf{x}$ i en viss bas för V till koordinaterna för *en annan vektor* $T(\mathbf{x})$ i en bas för W, $A[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}$. Basbytesmatrisen opererar på *olika koordinater för en och samma vektor*, $P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$. Den vänsterriktade pilen i $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ kan tjäna till att få oss att tolka matrisen rätt.
Begreppen *egenvektor* och *egenvärde* som introduceras i **5.1** är centrala, såväl i matematik som i många tillämpningar. I många problem, matematiska eller tillämpade, är det väsentligt att bestämma en bas för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till en matris A. Det första steget är då att lösa matrisens karakteristiska ekvation som nämns i **5.2**. Sedan kan man ofta stödja sig på Sats 6 för att bestämma den önskade basen. En viktig tillämpning av detta ges först i **5.3**, diagonalisering av matriser och senare då diagonaliseringen utnyttjas i olika tillämpningar. Vi kommer här att behandla matrispotenser, avbildningsmatriser för linjära avbildningar **5.4**, system av linjära differentialekvationer i **5.7** och kvadratiska former senare i kapitel 7 (om tiden räcker till).

En annan intressant tillämpning ges i hållfasthetslära. Spänningsmatrisen $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$ beskriver normalspänningar σ och skjuvspänningar τ i plan parallella med koordinatplanen, genom en kropp som påverkas av inre och yttre krafter. Egenvektorer till matrisen $\mathcal{S}$ är huvudspänningsriktningarna, motsvarande egenvärden är normalspänningen i plan vinkelräta mot egenvektorn. I dessa plan är skjuvspänningen noll. Matrisen $\mathcal{S}$ är alltid symmetrisk och därmed, vilket vi skall se senare, alltid diagonaliserbar. Andra intressanta egenskaper kommer vi att studera under vecka 6.

Veckans kapitel kommer att behandlas i ordningen 5.1, 5.2, 5.3, 5.7, 4.7, 5.4

Lärmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Lay	Mål
5.1	definiera begreppen *egenvektor* och *egenvärde*.
5.2	förklara varför lösningarna till den karakteristiska ekvationen till en matris är matrisens egenvärden.
5.2	bestämma egenvärden och egenvektorer till en matris.
5.3	bestämma egenvektorsbas till en matris
5.3	*diagonalisera* en matris
5.3	beräkna potenser av en matris med hjälp av diagonalisering
5.7	utnyttja matrisdiagonalisering för att lösa system av linjära differentialekvationer.
4.7	växla mellan olika baser för $\mathbb{R}^n$, Sats 4.7.15 är central.

För överbetyg skall du också kunna:

Lay	Mål
5.7	förklara, med hjälp av variabelbyte, hur diagonalisering av matris leder till allmänna lösningen till ett system av linjära differentialekvationer
4.7	växla mellan olika baser för andra vektorrum än $\mathbb{R}^n$.
5.4	bestämma och använda avbildningsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ till en linjär avbildning T från V till V, relativt en given bas $\mathcal{B}$ för V
5.4	växla mellan olika baser i samband med linjära avbildningar
5.4	tillämpa diagonalisering i samband med linjära avbildningar.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
5.1	PP, 1, 3, 5, 6, 7, 9	13, 15, 17, 19, 21	25, 29, 31
5.2	PP, 1, 5, 9	13, 17, 21, 27, 30	18, 20, 24
5.3	PP, 1, 5, 7	3, 11, 15, 17, 21	23, 27
5.7	1, 3	15, 19	5, 7
4.7	PP, 1, 3, 5, 7	11, 19	13, 15
5.4			PP, 1, 3, 5, 9, 11, 15, 21, 32

OBS! Bortse från frågor som berör sänka, källa eller sadelpunkt i 5.7.