IDAG: Egenvärden och egenvektorer

Mål:
- Förstå koncepten ↑
- Beräkna dessa för små matriser

[MATLAB-DEMO]

(Som visar att givet en godtycklig lin. avb. T så finns ofta vektorer x som endast skalas om av T, dvs. $Tx = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$)

Def. Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Om det finns ett $x \neq 0$ som uppfyller $Ax = \lambda x$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$ är detta λ ett egenvärde till A. Alla $x \neq 0$ som uppfyller $Ax = \lambda x$ är egenvektorer associerade med λ.

OBS: Om vi har en egenvektor har vi alltid ett egenvärde, och om vi har ett egenvärde har vi alltid minst en egenvektor (faktiskt ∞ många).

Ex. Om $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ så är $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en egenvektor med egenvärdet $\lambda = 5$ då $Av = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5v$.

$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ är inte en egenvektor då $Aw = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \lambda w$ för något λ.

Hur hittar vi egenvärden och egenvektorer?

Det börjar bli tjatigt, men: radreducera!

Antag att $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Då är $Ax - \lambda x = 0$, dvs. $\boxed{(A - \lambda I)x = 0 \text{ har en icke-trivial lösning.}}$

Vi radreducerar därför $A-\lambda I$.

<u>Ex. forts.</u>

$$[A-\lambda I \mid 0] = \left[\begin{array}{cc|c} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2-\lambda & 0 \\ 4-\lambda & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\frac{(4-\lambda)(2-\lambda)}{3} & 0 \end{array}\right]$$

så vi har en icke-trivial lösning omm $3=(4-\lambda)(2-\lambda)$.

Detta ger $\lambda^2-6\lambda+8-3=0$

$\Leftrightarrow \quad (\lambda-3)^2 = 9-5=4$

$\Leftrightarrow \quad \lambda = 3\pm 2$, dvs. $\lambda=1$ eller $\lambda=5$

Med $\lambda=5$ har vi $\begin{cases} 3x_1-3x_2=0 \\ 0=0 \end{cases}$ dvs. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

så <u>alla</u> $c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c\in\mathbb{R}$, är egenvektorer associerade med egenvärdet $\lambda=5$. ($\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ såg vi tidigare.)

$\lambda=1$ ger $3x_1+x_2=0$, dvs. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$,

så alla $c\begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c\in\mathbb{R}$, är egenvektorer ass. med $\lambda=1$.

<u>Def.</u> Givet ett egenvärde λ till A kallar vi mängden $\mathrm{Nul}(A-\lambda I) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=\lambda x\}$ <u>egenrummet</u> till λ. (Dess dimension är den <u>geometriska</u> <u>multipliciteten</u> av λ.)

OBS: Egenrummet innehåller förutom alla egenvektorer även nollvektorn.

I exemplet var egenrummen till $\lambda=1$ och $\lambda=5$ båda linjer, men det kan se annorlunda ut. T.ex. är $\lambda=1$ ett egenvärde till $A=I_2$ och $\mathrm{Nul}(I_2-1I_2)=\mathrm{Nul}(0)=\mathbb{R}^2$.

Alltså har $\lambda=1$ här geometrisk multiplicitet 2 och <u>alla</u> $x\neq 0$ är egenvektorer!

Specialfall

Sats 5.1.½ Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara diagonal.

Då är varje $(A)_{ii}$, $i = 1, \dots, n$, ett egenvärde till A och deras geometriska multiplicitet är antalet gånger som $(A)_{ii}$ förekommer i A.

Bevis: $A - \lambda I$ är diagonal med diagonalelement $(A)_{ii} - \lambda$. Antalet fria variabler i $(A - \lambda I)x = 0$ är antalet noll-element på diagonalen. □

Sats 5.1.1 Sats 5.1.½ håller även för triangulära matriser.

Bevis: Som för Sats 5.1.½.

Sats 2.3.8′ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är singulär omm $\lambda = 0$ är ett egenvärde.

Bevis: Om $\lambda = 0$ är ett egenvärde finns $x \neq 0$ så att $Ax = 0$, och omvänt. Enligt Sats 2.3.8 är detta ekvivalent med att A inte är inverterbar.

Vad ska vi ha detta till då?

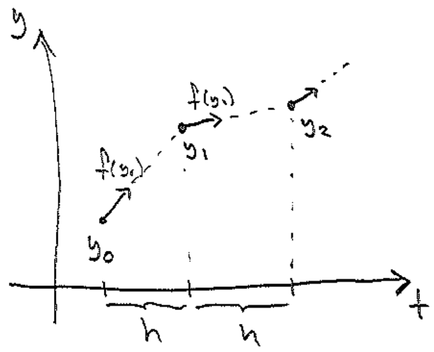
Ni såg ett exempel i Lab 2, här kommer ett (av många) till: (fler senare)

Ex. I endim-kursen såg ni att man kan approximera lösningar till en diff.ekv. $\underset{y(0)=z}{y' = f(y)}$, med t.ex. explicit Euler-metoden. →

Ex. forts. Detta ger

$$y_{k+1} = y_k + hf(y_k), \quad y_0 = z,$$

för någon steglängd h.



Tar vi ett linjärt system av ODEs;

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = z \end{cases} \quad \text{får vi} \quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k + hAx_k \\ x_0 = z \end{cases}$$

(här är $x(t)$ och x_k båda vektorer), dvs.

$$x_{k+1} = (I + hA)x_k = (I + hA)^2 x_{k-1} = \dots = (I+hA)^{k+1} z.$$

Antag nu att z är en egenvektor till A med egenvärde λ. Då är $(I+hA)z = z + h\lambda z = (1+h\lambda)z$, så

$$x_k = (1+h\lambda)^k z.$$

Om $\lambda > 0$ eller $h\lambda < -1$ så är $|1+h\lambda| > 1$, dvs. $x_k \to \infty$, $k \to \infty$. Man kan dock visa att $x(t) \to 0$, $t \to \infty$, om $\lambda < 0$, så om inte $h < \frac{1}{|\lambda|}$ blir approximationen helt fel!

Vi har en steglängdsbegränsning som beror på λ.

Ex. Om vi arbetar i en bas av egenvektorer så blir alla räkningar med A enklare:

$$x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \Rightarrow Ax = x_1 \lambda_1 v_1 + \dots + x_n \lambda_n v_n.$$

Mer om detta i F12, men vi noterar här

Sats 5.1.2 Om $v_1, \dots, v_r$ är egenvektorer till $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ associerade med de distinkta egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ så är $\{v_1, \dots, v_r\}$ lin. ober.

Dvs. de är en bas för ett r-dimensionellt underrum!

Bevis: Vi antar motsatsen, dvs. någon vektor är en lin. komb. av de andra. Låt p vara det första indexet så att

$$v_{p+1} = c_1 v_1 + \cdots + c_p v_p \quad \text{och} \quad \{v_1, \ldots, v_p\} \text{ lin. ober.}$$

$p \geq 1$ då $v_1 \neq 0$ (jämför Sats 1.7.7)

Vi får
$$\lambda_{p+1} v_{p+1} = c_1 \lambda_{p+1} v_1 + \cdots + c_p \lambda_{p+1} v_p \quad \text{men även}$$
$$\lambda_{p+1} v_{p+1} = c_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + c_p \lambda_p v_p$$

då $Av_k = \lambda_k v_k$. Alltså:

$$0 = c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) v_1 + \cdots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1}) v_p$$

$\Rightarrow c_k(\lambda_k - \lambda_{p+1}) = 0$ då $\{v_1, \ldots, v_p\}$ lin. ober., men

$\lambda_k \neq \lambda_{p+1}$ så $c_k = 0$. Detta är en motsägelse då $v_{p+1} \neq 0$.
$\Rightarrow \{v_1, \ldots, v_r\}$ lin. ober. □

Karakteristisk ekvation

Egenvärdena för A är de λ för vilket $A - \lambda I$ är singulär. Detta är ekvivalent med

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

vilket vi ska använda för att räkna ut λ.

Vi kallar $\det(A-\lambda I)=0$ den karakteristiska ekvationen för A.

Ex.
$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = (\lambda - 3)^2 - 4$$

$$= 0 \quad \text{omm} \quad \lambda = 1 \text{ eller } \lambda = 5$$

För 2×2-matriser är alltid $\det(A - \lambda I)$ ett polynom i λ av grad 2.

I 3×3 fallet kan vi t.ex. expandera $\det(A-\lambda I)$ längs rad 1 och få

$$\det(A-\lambda I) = (a_{11}-\lambda)\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

dvs. ett polynom i λ av grad 3.

Allmänt:

Om $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ är $\det(A-\lambda I)$ ett polynom av grad n.

<u>Def.</u> Detta polynom kallas det <u>karakteristiska polynomet</u> för A.

Ett polynom av grad n har alltid precis n (komplexa) nollställen, räknat med multiplicitet, dvs. (om $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$)

$$\det(A-\lambda I) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}$$

med $\sum_{k=1}^{r} n_k = n$ och $\lambda_k\in\mathbb{C}$, $k=1,\dots,r$.

Talet n_k är λ_k:s <u>algebraiska multiplicitet</u>.

(Tyvärr är inte alg.mult. = geometrisk mult., men vi har alltid geom. mult. $\leq$ alg. mult.)

Tillsvidare kommer vi bara ha $\lambda_k\in\mathbb{R}$.