IDAG: Diagonalisering av matriser

Mål:
- Faktorisera A via egenvektorer
- Lösa system av ODEs enklare

Def. Två matriser A och B är similära om det finns en inv. matris P så att

$A = PBP^{-1}$. Avbildningen $A \mapsto P^{-1}AP\ (=B)$ kallas en similaritetstransformation.

Sats 5.3.4 Två similära matriser har samma egenvärden, med samma algebraiska multiplicitet.

Bevis: Vi visar att de har samma karakteristiska ekvation:

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow A - \lambda I = PBP^{-1} - \lambda PP^{-1} = P(B-\lambda I)P^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(A-\lambda I) = \det P \cdot \det(B-\lambda I) \cdot \det(P^{-1})$$

$$= \det(\underbrace{PP^{-1}}_{=I}) \det(B-\lambda I)$$

$$= \det(B-\lambda I). \quad \square$$

Def. A är diagonaliserbar om A är similär med en diagonal matris, dvs. $A = PDP^{-1}$ med D diagonal och P inv.

Detta är t.ex. bra för beräkning av A^k då k är stort, då $\longrightarrow$

$A^2 = P D \underbrace{P^{-1} P}_{=I} D P^{-1} = P D^2 P^{-1}$, så

$\underline{A^k = P D^k P^{-1}}$, och om $D = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}$

så är $D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & & & \\ & d_{22}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn}^k \end{bmatrix}$.

Många matriser är diagonaliserbara. T.ex.:

<u>Sats 7.1.2</u> (Senare i kursen!)

Om $A = A^T$ är A diagonaliserbar.

I detta fall har vi en <u>bas</u> av egenvektorer till A:

<u>Sats 5.3.5</u> $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är diagonaliserbar omm A har n lin.ober. egenvektorer. I så fall är $A = PDP^{-1}$ där kolonnerna i P är dessa egenvektorer och D är diagonal med motsvarande egenvärden.

<u>Bevis:</u> Låt $P = [v_1 \cdots v_n]$ och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Om $\{v_1, \dots, v_n\}$ är lin. ober. med egenvärden $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ så är P inv. och $AP = [\lambda_1 v_1 \cdots \lambda_n v_n] = PD$, dvs. $A = PDP^{-1}$.

Omvänt, om $A = PDP^{-1}$ får vi att $AP = PD$, dvs. $Av_i = \mathrm{col}_i(AP) = \mathrm{col}_i(PD) = \lambda_i v_i$, så $\{v_1, \dots, v_n\}$ är egenvektorer. De är lin.ober. då P är inv. $\square$

Vi visade i F11 att A har n lin.ober. om A har n distinkta egenvärden. Alltså:

<u>Sats 5.3.6</u> Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ har n distinkta egenvärden så är A diagonaliserbar.

Det som är viktigt är dock att de samlade egenrummen spänner upp hela $\mathbb{R}^n$. Detta är en del av Sats 5.3.7 [Läs i Lay!].

<u>Sats 5.3.7'</u> Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha $r \leq n$ distinkta egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Låt E_k vara egenrummet för λ_k. Om $\sum_{k=1}^{r} \dim E_k = n$ så är A diagonaliserbar. (Utan bevis.)

<u>Praktisk procedur</u> (för $n \leq 3$)

För att diagonalisera $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gör vi alltså följande:

I. Hitta egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ till A via $0 = \det(A - \lambda I)$.

II. För varje λ_k, bestäm en bas för dess egenrum E_k: $\mathcal{B}_k = \{v_1^k, v_2^k, \dots, v_{n_k}^k\}$.

Detta ger $\dim E_k = \#(\mathcal{B}_k) = n_k$.

Om $\sum_{k=1}^{r} \dim E_k < n$ är A inte diag. Annars:

III. Bilda $P = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \cdots & \mathcal{B}_r \end{bmatrix}$

OBS: Blocknotation! $\mathcal{B}_k$ innehåller vektorerna $v_1^k, \dots, v_{n_k}^k$.

$\longrightarrow$

IV. Bilda

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n I_{n_r} \end{bmatrix}$$

där $n_k = \dim E_k$, dvs. upprepa λ_k lika många gånger som dimensionen av E_k; t.ex. $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

V. Kontrollera att $AP = PD$!

Sats 5.3.7 garanterar att P inv. om allt gjorts rätt.

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 16 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

I. $\det(A - \lambda I) = (-3-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 3$

II. $(A - \lambda_1 I)x = 0 \iff \begin{cases} -2x_2 + 16x_3 = 0 \\ 6x_2 = 0 \\ 6x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

så $E_1 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ och $\dim E_1 = 1$.

$(A - \lambda_2 I)x = 0 \iff \begin{cases} -6x_1 - 2x_2 + 16x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x = x_2 \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 8/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

så $E_2 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ och $\dim E_2 = 2$.

III. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Notera lin.ober. kolonner, $\Rightarrow$ inv.)

IV. $D = \begin{bmatrix} -3I_1 & \\ & 3I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

V. $AP = PD$: Kontrollera själva! Lätt att göra fel.

Applikation: System av ODEs

I FII tittade vi på explicit Euler för

$x'(t) = Ax(t)$, som gav iterationen $x_{k+1} = x_k + hAx_k$

Men vi kan också betrakta $x'(t) = Ax(t)$ direkt.

Här är $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, så $x(t) \in \mathbb{R}^n$ men $x \in V$

där $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ är deriverbar} \}$.

Låt $U = \{ x \in V \mid x'(t) = Ax(t),\ t \in \mathbb{R} \}$ vara

mängden av alla lösningar. U är ett <u>underrum</u> till V då t.ex. $x+y \in U$ om $x, y \in U$, eftersom

$(x+y)'(t) = x'(t) + y'(t) = Ax(t) + Ay(t) = A(x+y)(t)$.

Man kan visa att $\boxed{\dim U = n}$ (se sista sidan)

dvs. en bas för U ges av n st. lin. ober. lösningar $b_1, \dots, b_n$. <u>Alla</u> lösningar fås sen via $x(t) = c_1 b_1(t) + \dots + c_n b_n(t)$.

Vi vill nu hitta en sådan bas.

Tony Stillfjord tony.stillfjord@chalmers.se

Lösningen till $x'(t) = \lambda x(t)$ är $x(t) = Ce^{\lambda t}$, ($x(t) \in \mathbb{R}$)

och lösningen till $x'(t) = Dx(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} x(t)$ ($x(t) \in \mathbb{R}^n$)

är $x_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}$.

$x' = Dx$ är alltså mycket lättare att lösa än $x' = Ax$ (vi har ju redan löst det), så en idé är att konvertera $x' = Ax$ till $x' = Dx$, lösa, och konvertera tillbaka. Detta går om A är diagonaliserbar!

Låt A ha n lin. ober. egenvektorer $\{v_k\}_{k=1}^n$,

$P = [v_1 \cdots v_n]$ och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ så att

$A = PDP^{-1}$.

Gör variabelbytet $y(t) = P^{-1}x(t)$, dvs. $x(t) = Py(t)$.

$$\Rightarrow Py'(t) = \frac{d}{dt}(Py)(t) = \frac{d}{dt}(x)(t) = Ax(t)$$

$$= PDP^{-1}x(t) = PDy(t)$$

$$\overset{\text{mult. med } P^{-1}}{\Rightarrow} y'(t) = Dy(t)$$

Nu vet vi att $y_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}$.

Transformera tillbaka för att få $x(t)$:

$$x(t) = Py(t) = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n v_n e^{\lambda_n t}.$$

Detta är alla lösningar till $x'(t) = Ax(t)$.

Bestäm C_k genom att sätta in givna initialvärden, t.ex. $x(0)$.

Extra 1 (för intresserade)

Vi kan skriva lösningen till $x'(t) = Dx(t)$ på 12.6

som
$$x(t) = e^{tD}C = e^{tD}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{där}$$

$$e^{tD} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} \quad \text{eftersom} \quad D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Man kan även definiera e^{tA} på detta sätt för alla matriser A. Serien konvergerar alltid och vi kallar e^{tA} matrisexponentialen för tA.

Det gäller att
$$\underbrace{\frac{d}{dt}e^{tA}}_{\text{derivatan av en matris-värd funktion!}} = \underbrace{Ae^{tA}}_{\text{en matris!}} \quad \text{och} \quad \underbrace{\frac{d}{dt}e^{tA}x}_{\text{derivatan av en vektor-värd funktion!}} = \underbrace{Ae^{tA}x}_{\text{en vektor}}$$

så $x(t) = e^{tA}x_0$ är den allmänna lösningen till

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0.$$

Extra 2, bevis för $\dim U = n$

Låt $x_1, \dots, x_p \in U$. Då betyder

$c_1x_1 + \dots + c_px_p = 0$ att $c_1x_1(t) + \dots + c_px_p(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

dvs. $\{x_1, \dots, x_p\}$ lin. ober. i $U \Rightarrow \{x_1(t), \dots, x_p(t)\}$ lin. ober. i $\mathbb{R}^n$ för alla t. Alltså har vi $\dim U \leq p \leq n$.

Genom varje punkt i $\mathbb{R}^n$ går en lösning till $x' = Ax$, så välj n st. lin. ober $z_k \in \mathbb{R}^n$: detta ger n lösningar $x_k \in U$ med (t.ex.) $x_k(0) = z_k$. Dessa är lin. ober., ty om det inte var det skulle $\{z_k\}$ vara lin. ber. Alltså behöver vi minst n lösningar för att spänna upp U: $\dim U \geq n$.

$\Rightarrow \dim U = n.$ $\square$