IDAG: Linjära avbildningar

Mål: • Generalisera standardmatrisen till olika baser (specifikt av egenvektorer)

• Se hur man numeriskt kan beräkna egenvärden

Om $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär vet vi att det finns ett $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ så att

$$T(x) = Ax \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Detta är uttryckt i <u>standardbaserna</u> för $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$.

Antag istället att vi har $T: V \to W$ (linjär) med baserna $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ för V och $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ för W.

Vi kan identifiera V med $\mathbb{R}^n$ och W med $\mathbb{R}^m$ via t.ex.

$$x = P_\mathcal{B}[x]_\mathcal{B}, \quad x \in V, [x]_\mathcal{B} \in \mathbb{R}^n \text{ och } P_\mathcal{B}: \mathbb{R}^n \to V$$

<u>koordinatavbildningen</u>. (Om $b_i \in \mathbb{R}^k$ så är $P_\mathcal{B} = [b_1 \cdots b_n] \in \mathbb{R}^{k \times n}$.)

Vi vill uttrycka x och $T(x)$ i $\mathcal{B}$- och $\mathcal{C}$-koordinater då vi inte har några "standardkoordinater" för V och W:

Om $[x]_\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ får vi

$$T(x) = T(x_1 b_1 + \dots + x_n b_n) \underset{T \text{ lin.}}{=} x_1 T(b_1) + \dots + x_n T(b_n), \text{ så}$$

$$[T(x)]_\mathcal{C} \underset{x \mapsto [x]_\mathcal{C} \text{ lin.}}{=} x_1 [T(b_1)]_\mathcal{C} + \dots + x_n [T(b_n)] = \big[[T(b_1)]_\mathcal{C} \cdots [T(b_n)]_\mathcal{C}\big] [x]_\mathcal{B}$$

Så $[T(x)]_C = M[x]_B$ där $M = \big[\,[T(b_1)]_C \cdots [T(b_n)]_C\,\big]$.

Vi kallar M <u>matrisen för T relativt baserna B och C</u>.

Dvs.

$$x \in V \longrightarrow T(x) \in W \quad \text{motsvaras av}$$

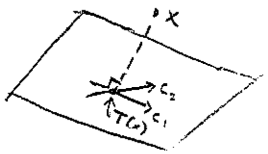
$$[x]_B \in \mathbb{R}^n \longrightarrow M[x]_B = [T(x)]_C \in \mathbb{R}^m .$$

<u>Ex.</u> Låt $V = \mathbb{R}^3$ med basen $B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{b_3} \right\}$,

och $U = \left\{ \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \right\}$.

En bas för U ges av $C = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}}_{c_2} \right\}$ (parametrisk form!)

Låt $T : V \to U$ vara projektionen på U, dvs. alla punkter avbildas på den närmaste punkten i planet U.



Vi kommer visa senare att då är

$$T(b_1) = \tfrac{1}{14}(13, -2, -3) = \tfrac{1}{14}(-2c_1 - 3c_2)$$

$$T(b_2) = \tfrac{1}{14}(11, 8, -9) = \tfrac{1}{14}(8c_1 - 9c_2)$$

$$T(b_3) = \tfrac{1}{14}(8, 2, -4) = \tfrac{1}{14}(2c_1 - 4c_2)$$

så

$$M = \big[\,[T(b_1)]_C \;\; [T(b_2)]_C \;\; [T(b_3)]_C\,\big]$$

$$= \frac{1}{14}\begin{bmatrix}-2 & 8 & 2\\ -3 & -9 & -4\end{bmatrix}$$

Notera att $M \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ då $\dim V = 3$ och $\dim U = 2$.

<u>Specialfall</u>

Om $V = \mathbb{R}^n$ och $W = \mathbb{R}^m$ med <u>standardbaserna</u> så är M standardmatrisen för T: $T(x) = Mx$.

Om $T: V \to V$ och $\mathcal{B}$ är en bas för V kallar vi M matrisen för T relativt $\mathcal{B}$, eller $\mathcal{B}$-matrisen för T, skrivs $[T]_{\mathcal{B}}$: $[T(x)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$

Om $V = \mathbb{R}^n$ och $W = \mathbb{R}^n$ med baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$, och $T(x) = x$ så är M basbytesmatrisen $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$: $[x]_{\mathcal{C}} = [T(x)]_{\mathcal{C}} = M[x]_{\mathcal{B}}$.

Koppling till diagonalisering

Antag att $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ges av $T(x) = Ax$ där A är diagonaliserbar. $\Rightarrow A = PDP^{-1}$, där $P = [b_1 \cdots b_n]$ och $\{b_1, \ldots, b_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ av egenvektorer till A.

Sats 5.4.8 I $\mathcal{B}$-koordinater ges T av en diagonal matris, nämligen $[T]_{\mathcal{B}} = D$.

Bevis: Vi vet $P[x]_{\mathcal{B}} = x$, så $[x]_{\mathcal{B}} = P^{-1}x$.

Men då är

$$[T]_{\mathcal{B}} = \big[[T(b_1)]_{\mathcal{B}} \cdots [T(b_n)]_{\mathcal{B}} \big]$$
$$= \big[[Ab_1]_{\mathcal{B}} \cdots [Ab_n]_{\mathcal{B}} \big]$$
$$= \big[[\lambda_1 b_1]_{\mathcal{B}} \cdots [\lambda_n b_n]_{\mathcal{B}} \big]$$
$$= [\lambda_1 e_1 \cdots \lambda_n e_n] = D. \quad \square$$

(Lite annorlunda bevis i Lay.)

Detta motsvaras av att vi gör variabelbytet $y = P^{-1}x$.

I basen $\mathcal{B}$ är T lättare att arbeta med.

Ex. (Lay) Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $x \mapsto \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} x$.

Vi vill hitta en bas där T istället ges av en diagonalmatris.

Diagonalisera A:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (7-\lambda)(1-\lambda) + 8 = \lambda^2 + 8\lambda + 15$$
$$= (\lambda - 4)^2 - 1$$

så $\lambda = 3$ eller $\lambda = 5$.

Egenrum för $\lambda = 3$: $\left\{ b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$, $\lambda = 5$: $\left\{ b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

så $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (notera omvänd ordning i Lay)

$\Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ om $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Kontroll: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \end{bmatrix}$

$[x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[T(x)]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} [x]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$T(x) = P \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \end{bmatrix} = Ax$.

Generalisering:

> Om $A = PCP^{-1}$ (dvs. A och C är similära) så är $[T]_B = C$ om B är basen som ges av kolonnerna i P.

$\longrightarrow$

Bestämma egenvärden numeriskt

Det går inte att lösa $\det(A-\lambda I)=0$ exakt då $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ med $n \geq 5$ (med ändligt antal operationer) då $\det(A-\lambda I)$ är ett polynom av grad n.

Vad gör vi då? Approximera!

Idé: Hitta en sekvens $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}^n$ som närmar sig en egenvektor v: $Av = \lambda v$.

Dvs. $Ax_k \approx \lambda x_k$, och vi får en approximation till λ genom att beräkna

Rayleigh-kvoten $\quad \dfrac{x_k^T A x_k}{x_k^T x_k} \approx \dfrac{v^T A v}{v^T v} = \dfrac{v^T \lambda v}{v^T v} = \lambda.$

Den enklaste metoden ges av potensiteration:

Ta ett godtyckligt $x \in \mathbb{R}^n$ och beräkna $x_k = A^k x$.

[MATLAB-DEMO] (som motiverar nedanstående)

Om A har egenvärden λ_k och motsvarande egenvektorer v_k som bildar en bas för $\mathbb{R}^n$ så är

$$x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \quad \text{för några } c_k \text{, så}$$

$$x_k = A^k x = c_1 A^k v_1 + \cdots + c_n A^k v_n = c_1 \lambda_1^k v_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n .$$

Om nu $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ får vi att

$$\frac{1}{\lambda_1^k} x_k = c_1 v_1 + c_2 \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}_{<1}^k v_2 + \cdots + c_n \underbrace{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)}_{<1}^k v_n \longrightarrow c_1 v_1 \text{ då } k \to \infty,$$

$\longrightarrow$

så $\frac{1}{\lambda_1^k} x_k \to$ en egenvektor motsvarande λ_1

Vi får en approx. till A:s största egenvärde!

I praktiken räknar vi ut $\frac{1}{\frac{x_k^T A x_k}{x_k^T x_k}} x_k$

då vi inte vet λ_1.

Vi kan modifiera proceduren för att få andra egenvärden än λ_1.

Beräkna istället $x_k = (A-\alpha I)^{-k} x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Om $Av_k = \lambda_k v_k$ så är $(A-\alpha I)v_k = (\lambda_k - \alpha) v_k$

dvs. $(A-\alpha I)^{-1} v_k = \frac{1}{\lambda_k - \alpha} v_k$

Om $\lambda_k \approx \alpha$ blir $\frac{1}{\lambda_k - \alpha}$ stort, så $x_k \to v_k$

och vi hittar egenvärdet λ_k istället för λ_1.

[MATLAB-DEMO]

Att dessa metoder verkligen fungerar, och bättre metoder som t.ex. QR-metoden, ser ni i kurser om numerisk analys.