IDAG: Ortogonalitet

Mål: • Generalisera avstånd och vinklar till $\mathbb{R}^n$

• Beskriva projektioner

Låt $u, v \in \mathbb{R}^n$. Vi har redan definierat

skalärprodukten $$u \cdot v = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j .$$

komponenterna av u och v

Genom att se u och v som $n \times 1$-matriser

får vi $$[u \cdot v] = u^T v = [u_1 \cdots u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} .$$

Hädanefter kommer vi se 1×1-matrisen $[u \cdot v]$

som talet $u \cdot v$ och bara skriva $u \cdot v = u^T v$.

Det följer direkt att

1×1-matris

$$\boxed{u \cdot v =} \; u^T v = (v^T u)^T = v^T u \; \boxed{= v \cdot u} \quad \text{och}$$

$$\boxed{(au + bv) \cdot w =} \; (au+bv)^T w = (au^T + bv^T) w \; \boxed{= a u \cdot w + b v \cdot w}$$

för alla $a, b \in \mathbb{R}$.

Vi får även att $\boxed{u \cdot u \geq 0 \text{ och } u \cdot u = 0 \Rightarrow u = 0.}$

Vi kan därför säga

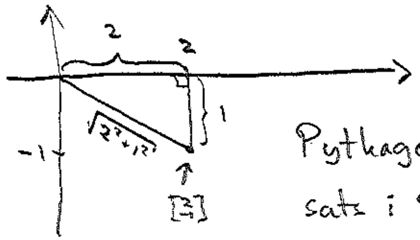
Def. Normen av $u \in \mathbb{R}^n$ ges av talet

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} u_j^2} .$$

Detta är "längden" av en vektor:

Ex.

$$\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$



Pythagoras sats i 2D!

Def. En <u>enhetsvektor</u> är en vektor $u \in \mathbb{R}^n$ med $\|u\| = 1$.

Ex. Alla $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ är enhetsvektorer.

Ex. Givet $v \in \mathbb{R}^n$ är $\frac{v}{\|v\|}$ en enhetsvektor, då

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\|^2 = \frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\|v\|^2} v \cdot v = \frac{1}{\|v\|^2} \cdot \|v\|^2 = 1.$$

Detta kallas att <u>normalisera</u> en vektor: det ändrar bara storleken på v men inte riktningen.

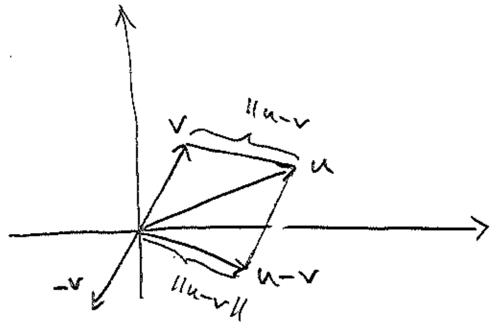
Kan vi mäta "längder" kan vi mäta avstånd:

Def. <u>Avståndet</u> mellan u och v i $\mathbb{R}^n$ ges av

$$\text{dist}(u, v) = \|u - v\| \quad \text{(p.g.a. engelska "distance")}$$

(Här ser vi mer naturligt u och v som punkter snarare än sträckor.)

Ex.



Def. Vi säger att u och v är <u>ortogonala</u> om $u \cdot v = 0$.

Detta betyder "rätvinkliga": 2D och 3D, och vi får

<u>**Sats 6.1.2**</u> (Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$.)

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ omm u och v är ortogonala.

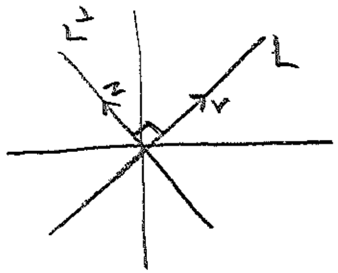
Bevis:
$$\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + u\cdot v + \overbrace{v\cdot u}^{=u\cdot v} + v\cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u\cdot v$$

och $2u\cdot v = 0 \iff u, v$ är ortogonala. $\square$

Def. Låt W vara ett underrum av $\mathbb{R}^n$. Då är $z \in \mathbb{R}^n$ ortogonal till W om $z \cdot v = 0$ för alla $v \in W$. Det ortogonala komplementet till W ges av

$$W^\perp = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid z \cdot v = 0 \ \forall v \in W \}.$$

Ex. I 2D är $u \cdot v = 0$ omm u och v är vinkelräta (Pythagoras). Så om L är en linje blir $L^\perp$ en vinkelrät linje:



Sats

(I) Låt $W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_p\} \subset \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$x \in W^\perp \Leftrightarrow x \cdot v_k = 0, \quad k = 1, \dots, p.$$

(II) $W^\perp$ är ett underrum av $\mathbb{R}^n$.

Bevis: (I) ($\Leftarrow$) Om $x \cdot v_k = 0$ för alla k så är

$$x \cdot (c_1 v_1 + \dots + c_p v_p) = 0$$

($\Rightarrow$) Om $x \cdot (c_1 v_1 + \dots + c_p v_p) = 0$ för alla $c_1, \dots, c_p$ kan vi t.ex. ta $c_1 = 1, c_2 = 0, \dots, c_p = 0$ och få $x \cdot v_1 = 0$.

(II) Verifiera de tre kraven: $0 \in W^\perp$ då $0 \cdot v = 0 \ \forall v$.

$u \cdot v = 0$ och $w \cdot v = 0 \Rightarrow (u + w) \cdot v = 0$ så $u + w \in W^\perp$

$u \cdot v = 0$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow (cu) \cdot v = c(u \cdot v) = 0$ så $cu \in W^\perp$. $\square$

Speciella underrum

Sats 6.1.3 Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Då är

$$(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul } A \quad \text{och} \quad (\text{Col } A)^\perp = \text{Nul } A^T.$$

Bevis: Antag att A:s rader är $r_1, r_2, \dots, r_m$, dvs. $A = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$ där $r_k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. $\longrightarrow$

Bevis forts.

$$x \in \mathrm{Nul}\,A \Rightarrow Ax = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1 \cdot x \\ r_2 \cdot x \\ \vdots \\ r_m \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

så $r_k \cdot x = 0$, $k = 1, \dots, m$.

Men $\mathrm{Span}\{r_1, \dots, r_m\} = \mathrm{Row}\,A$ så $x \in (\mathrm{Row}\,A)^\perp$.

Har vi istället $x \in (\mathrm{Row}\,A)^\perp$ så är $x \cdot r_k = 0 \ \forall k$

$\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Nul}(A)$

Alltså är $(\mathrm{Row}\,A)^\perp = \mathrm{Nul}(A)$.

Då $\mathrm{Col}\,A = \mathrm{Row}\,A^T$ får vi direkt $(\mathrm{Col}\,A)^\perp = \mathrm{Nul}\,A^T$. $\square$

Def. $S = \{u_1, \dots, u_p\} \subset \mathbb{R}^n$ är en ortogonal mängd

om $u_i \cdot u_j = 0$ då $i \neq j$.

Dvs. alla par av (olika) vektorer är ortogonala.

Ex. $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ är ortogonal, då

$$e_1 \cdot e_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad e_1 \cdot e_3 = 0, \quad e_2 \cdot e_3 = 0.$$

Ortogonalitet är alltid bra! T.ex.:

Sats 6.2.4 En ortogonal mängd S där $0 \notin S$ är linjärt oberoende, och därmed en bas för $\mathrm{Span}\{S\}$.

Bevis: Låt $S = \{u_1, \dots, u_p\}$. Då ger

$$\vec{0} = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p \quad \text{att} \quad 0 = \vec{0} \cdot u_1 = (c_1 u_1 + \dots + c_p u_p) \cdot u_1$$

$$\overset{S \text{ ortogonal}}{=} c_1 u_1 \cdot u_1 = c_1 \|u_1\|^2$$

Men $\|u_1\| \neq 0$ då $u_1 \neq \vec{0}$, så $c_1 = 0$.

På samma sätt får vi $c_k = 0$, $k = 1, \dots, p$. $\square$

Sats 6.2.5 Låt $\{u_1, \ldots, u_p\}$ vara en <u>ortogonal bas</u> för $W \subset \mathbb{R}^n$ (dvs. ortogonal mängd och bas). För $x = c_1 u_1 + \cdots + c_p u_p$ gäller då att

$$c_j = \frac{x \cdot u_j}{u_j \cdot u_j}.$$

Dvs. vi behöver inte lösa ett L.E.S. för att bestämma koordinaterna!

Bevis: $x \cdot u_1 \overset{\text{bas}}{=} (c_1 u_1 + \cdots + c_p u_p) \cdot u_1 \overset{\text{ortogonal}}{=} c_1 u_1 \cdot u_1$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \quad \text{då } u_1 \cdot u_1 = \|u_1\|^2 \neq 0.$$

Samma procedur för c_j, $j = 1, \ldots, p$. $\square$

Ex. $\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b_2} \right\}$ är en ortogonal bas för $\mathbb{R}^2$ (då $b_1 \cdot b_2 = 0$)

Med $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ får vi $u \cdot b_1 = 13$, $b_1 \cdot b_1 = 5$

$u \cdot b_2 = 11$, $b_2 \cdot b_2 = 5$

så

$$u = \frac{13}{5} b_1 + \frac{11}{5} b_2.$$

Ortonormalitet är ännu bättre!

Def. En mängd/bas $S = \{u_1, \ldots, u_p\}$ är <u>ortonormal</u> om $u_i \cdot u_j = 0$ då $i \neq j$ och $u_i \cdot u_i = 1$ (dvs. $\|u_i\| = 1$).

I detta fall blir koefficienterna i Sats 6.2.5 $\underline{c_j = x \cdot u_j}$

Ex. Standardbasen $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ är en ortonormal bas.

Ex. Om $\{u_1, \ldots, u_p\}$ är ortogonal så är

$$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, \frac{u_p}{\|u_p\|} \right\} \text{ ortonormal.}$$

[I F15 ska vi <u>konstruera</u> ortonormala baser med hjälp av detta.]

Ortogonala projektioner

Låt $W \subset \mathbb{R}^n$ vara ett underrum i det följande.

Då är $W^\perp$ "rätvinkligt" till W:

Sats 6.3.8 Låt $x \in \mathbb{R}^n$. Då finns entydigt bestämda $y \in W$ och $z \in W^\perp$ så att $x = y + z$.

Om $\{u_1, \ldots, u_p\}$ är en ortogonal bas för W så har vi

$$y = \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \cdots + \frac{x \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p$$

och vi kallar y den ortogonala projektionen av x på W, skrivs $y = \text{proj}_W x$.

Bevis: Antag att vi har en sådan bas (visas i F15).

Via def. av y får vi $y \in W$ och $z = x - y \in W^\perp$, ty

$$z \cdot u_j = (x-y) \cdot u_j \overset{\text{ortogonal bas, } u_i \cdot u_j = 0}{=} \left(x - \frac{x \cdot u_j}{u_j \cdot u_j} u_j\right) \cdot u_j =$$

$$= x \cdot u_j - x \cdot u_j \frac{u_j \cdot u_j}{u_j \cdot u_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, p.$$

y och z är unika: Om det fanns $\hat{y} \in W$ och $\hat{z} \in W^\perp$ så att $x = \hat{y} + \hat{z}$ så har vi $y + z = \hat{y} + \hat{z}$, dvs.

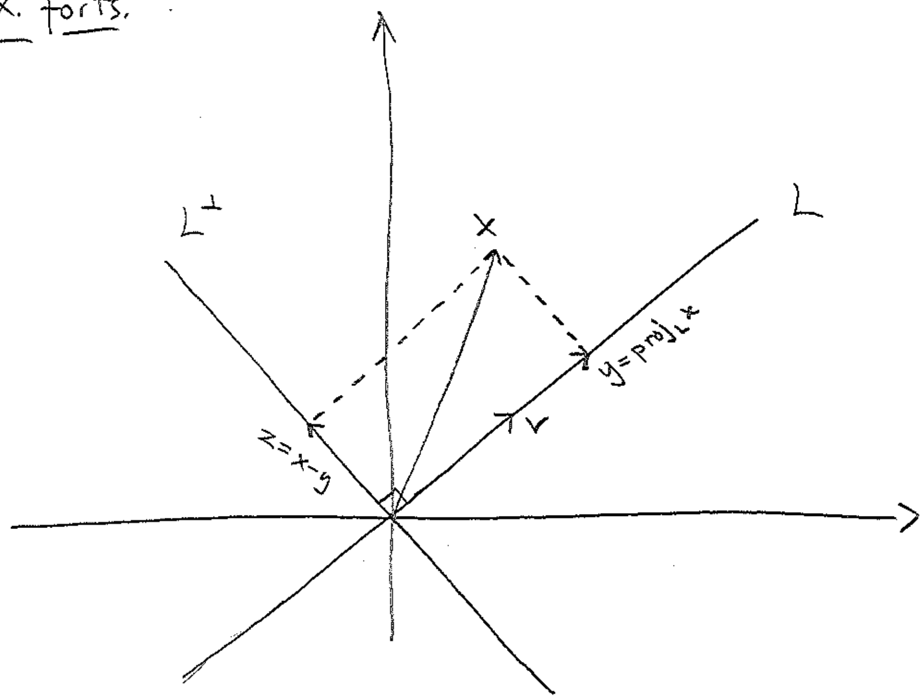
$$\underbrace{y - \hat{y}}_{\in W} = \underbrace{\hat{z} - z}_{\in W^\perp}.$$ Men W och $W^\perp$ har bara vektorn 0 gemensam, så $y = \hat{y}$ och $z = \hat{z}$.

(Alt.: $\underbrace{(y-\hat{y})}_{\in W} \cdot \underbrace{(y-\hat{y})}_{\in W^\perp} = 0 \Rightarrow \|y - \hat{y}\| = 0 \Rightarrow y = \hat{y}$.) $\square$

Ex. $\boxed{\text{Om } L = \{cv \mid c \in \mathbb{R}\} \text{ är en linje så är } \text{proj}_L x = \frac{x \cdot v}{v \cdot v} v}$

$\longrightarrow$

Ex. forts.



$y = \text{proj}_L x = cv$ för något $c \in \mathbb{R}$

Om $z = x - y \in L^\perp$ har vi

$$0 = (x-y)\cdot v = x\cdot v - c v\cdot v \Rightarrow c = \frac{x\cdot v}{v\cdot v}.$$

Notera att om $W = \text{Span}\{v_1, \ldots, v_p\}$ och vi definierar $W_k = \text{Span}\{v_k\}$ så är

$$\text{proj}_W x = \text{proj}_{W_1} x + \text{proj}_{W_2} x + \ldots + \text{proj}_{W_p} x$$

Ex. $\mathbb{R}^3$: $W = \text{Span}\{v_1, v_2\}$