IDAG: Differentiella Riccati-ekvationer

Mål: Visa att ni redan nu kan förstå vissa (moderna) forskningsresultat.

Inget av denna föreläsning kommer att examineras, den är endast motiverande!

Det handlar om forskning som jag fick publicerad för mindre än 2 år sedan.

<u>Def.</u> En <u>differentiell Riccati-ekvation</u> (DRE) har formen

$$X'(t) = A^T X(t) + X(t) A + Q - X(t)^2$$

där $X(t)$, A och Q är $n \times n$-<u>matriser</u>.

Dvs. ytterligare en generalisering från system av ODEs $x'(t) = Ax(t)$ där $x(t)$ är en <u>vektor</u>.

Vi har alltså $n \cdot n = n^2$ kopplade ODEs i en DRE, så det är väldigt dyrt att naivt lösa dem.

Typiskt har vi $n > 10000$ eller till och med $n \approx 10^6$.

$\longrightarrow$

$\Rightarrow$ $> 10^8$ eller 10^{12} kopplade ODE!

Måste göra något <u>smart</u> här.

<u>Smart</u>: Antag lågrangsfaktorisering:

$$X(t) = Z(t)Z(t)^T \quad \text{där } Z(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$$

med $r << n$ (mycket mindre än n)

Dvs.

$$n\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & X(t) & \\ & & \end{bmatrix}}_{n}\right. = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ Z(t) \\ \\ \end{bmatrix}}_{r} \underbrace{\begin{bmatrix} \quad Z(t)^T \quad \end{bmatrix}}_{n}\Big\} r$$

Vi får att

$$\operatorname{rank} X(t) \overset{\text{(Kryssuppgift 2, LV4)}}{\leq} \operatorname{rank} Z(t) \leq r.$$

Detta håller nästan alltid i praktiken!

(Men ingen har lyckats visa det helt ännu.)

($\Rightarrow$ framtida kryssuppgift?)

Vi kommer nu approximera $Z_k \approx Z(t_k)$ istället för $X(t_k)$ - mycket billigare.

Som numerisk metod tar vi en <u>splitting-metod</u>.

Ex. Låt $x' = Ax + Bx$. Då är approximationen $x_k \approx x(t_k)$ med

$$x_{k+1} = (I + hB)(I + hA)x_k$$

en typ av splittingmetod. Vi approximerar först $y' = Ay$, $y(0) = x_k$ med explicit Euler, och sen $z' = Bz$, $z(0) = y(h)$ med explicit Euler:

$$y_k = (I + hA)x_k \quad \text{och} \quad x_{k+1} = z_k = (I + hB)y_k.$$

I DRE-fallet löser vi först

$$X'(t) = A^T X(t) + X(t)A + Q \quad \underline{\text{exakt}}$$

och sen $X'(t) = -X(t)^2$ <u>exakt</u>

(istället för approximation med explicit Euler).

Lösning av $X' = A^T X + XA + Q$:

Givet $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är <u>matrisexponentialen</u> matrisen $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Den uppfyller $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$

så $x(t) = e^{tA}x_0$ löser därför $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$.

<u>Sats</u> (Matris-)funktionen

$$X(t) = e^{tA^T} X(0) e^{tA} + \int_0^t e^{sA^T} Q e^{sA} \, ds$$

löser $X'(t) = A^T X(t) + X(t)A + Q$. →

Bevis:

$$X'(t) = \left(\frac{d}{dt} e^{tA^T}\right) X(0) e^{tA} + e^{tA^T} X(0) \left(\frac{d}{dt} e^{tA}\right)$$

$$+ \frac{d}{dt} \int_0^t e^{sA^T} Q e^{sA} \, ds$$

(produktregeln, $(fg)' = f'g + gf'$)

$$= A^T e^{tA^T} X(0) e^{tA} + e^{tA^T} X(0) e^{tA} A$$

$$+ e^{tA^T} Q e^{tA}$$

$$= A^T X(t) + X(t) A + e^{tA^T} Q e^{tA}$$

$$- \int_0^t \underbrace{A^T e^{sA^T} Q e^{sA} + e^{sA^T} Q e^{sA} A}_{= \frac{d}{ds} e^{sA^T} Q e^{sA}} \, ds$$

$$= A^T X(t) + X(t) A + \underbrace{e^{tA^T} Q e^{tA} - \left(e^{tA^T} Q e^{tA} - Q\right)}_{= Q}.$$

Antag nu $X(0) = ZZ^T$ och $Q = Q_0 Q_0^T$

$$\Rightarrow X(t) = (e^{tA^T} Z)(Z^T e^{tA}) + \int_0^t (e^{sA^T} Q_0)(Q_0^T e^{sA}) \, ds$$

$$= (e^{tA^T} Z)(e^{tA^T} Z)^T + \int_0^t (e^{sA^T} Q_0)(e^{sA^T} Q_0)^T \, ds$$

$$= \ldots = Y(t) Y(t)^T$$

för ett $Y(t)$ som vi kan beräkna effektivt genom att lösa några L.E.S..

Lösning av $X'(t) = -X(t)^2$

Jämför först med fallet då $x(t) \in \mathbb{R}$, dvs.

$$x'(t) = -x(t)^2, \quad x(0) = x_0.$$

$\longrightarrow$

Då är $x(t) = \dfrac{x_0}{1+tx_0}$ eftersom

$$x'(t) = \frac{-x_0}{(1+tx_0)^2} \cdot \underbrace{x_0}_{\uparrow \text{ inre derivatan}} = -\frac{x_0}{1+tx_0}\,\frac{x_0}{1+tx_0} = -x(t)^2.$$

Sats Funktionen $X(t) = (I + tX_0)^{-1}X_0$

löser $X'(t) = -X(t)^2$.

Bevisidé: Via derivatans definition!

Notera att $(I+tX_0)^{-1}$ motsvarar $\dfrac{1}{1+tx_0}$.

För lågrangsfaktorisering av detta skall vi använda följande:

Sats (Woodburys formel, förenklad version)

Låt $I + CB$ vara inverterbar. Då är $I + BC$ inv. och

$$(I+BC)^{-1} = I - B(I+CB)^{-1}C.$$

Bevis: Vi har

$$\left(I - B(I+CB)^{-1}C\right)(I+BC)$$

$$= I + BC - B(I+CB)^{-1}C - B(I+CB)^{-1}CBC$$

$$= I + B\left(I \underbrace{- (I+CB)^{-1} - (I+CB)^{-1}CB}\right)C$$

$$= I + B\left(\underbrace{(I+CB)^{-1}(I+CB)}_{=I}\right)C$$

$$= I + B(I+CB)^{-1}\left(\underbrace{I + CB - I - CB}_{=0}\right)C = I.$$

$\longrightarrow$

Så enligt satsen om inv. matriser

är $I+BC$ inv. och $(I+BC)^{-1} = I - B(I+CB)^{-1}C$. $\square$

Antag nu att $X_0 = ZZ^T$. Då får vi

att

$$X(t) = (I + \underbrace{tZ}_{B}\underbrace{Z^T}_{C})^{-1} ZZ^T$$

Woodbury $\longrightarrow$

$$= \left(I - tZ(I+tZ^TZ)^{-1}Z^T\right) ZZ^T$$

$$= Z\Big(\underset{\substack{\uparrow \\ =(I+tZ^TZ)^{-1}(I+tZ^TZ)}}{I} - t(I+tZ^TZ)^{-1}Z^TZ\Big)Z^T$$

$$= Z\left(I+tZ^TZ\right)^{-1}\left(I + \cancel{tZ^TZ} - \cancel{tZ^TZ}\right)Z^T$$

$$= Z(I+tZ^TZ)^{-1}Z.$$

Detta ser kanske liknande ut,

men $Z^TZ \in \mathbb{R}^{r\times r}$ medan $ZZ^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Dvs. $I+tZ^TZ$ är en liten matris!

Kan inverteras "lätt", och man kan visa

Sats $\exists\, L \in \mathbb{R}^{r\times r}$ så att $(I+tZ^TZ)^{-1} = LL^T$.

$\Rightarrow X(t) = (ZL)(ZL)^T$,

och vi kan effektivt beräkna $ZL \in \mathbb{R}^{n\times r}$.

$\longrightarrow$

Slutsats

Vi kan lösa både

$$X'(t) = A^T X(t) + X(t) A + Q$$

och

$$X'(t) = -X(t)^2$$

effektivt i lågrangsfaktoriserad form

och därmed kan vi även approximera lösningen

till en DRE effektivt via en splittingmetod.

Dessa ekvationer behöver ofta lösas inom

t.ex. reglerteknik.

Lösningen ger då den optimala styrlagen

för en process under vissa krav.

Processen bestämmer matrisen A och

kraven bestämmer matrisen Q.