IDAG: Repetition av kursen

(ej heltäckande)

Huvudtema: linjära ekvationssystem (L.E.S.),

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Vektor- och matrisform:

$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, $a_j \in \mathbb{R}^m$ och $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Radreduktion:

$$[A \ \ b] \sim [I \ \ A^{-1}b]$$

om konsistent (lösbart) och unik lösning

(kan ha ∞ många)

Konsistent om: * pivotposition i varje rad av A

* $b \in \mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_n\}$

Linjära höljet av $a_1, \ldots, a_n$

= alla linjärkombinationer:

$$\mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_n\} = \{c_1a_1 + \cdots + c_na_n \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

Def. $\mathrm{Col}\, A = \mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$

$\mathrm{Nul}\, A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n$

$\mathrm{Nul}\, A = \{\vec{0}\} \Rightarrow a_1, \ldots, a_n$ linjärt oberoende:

$$c_1a_1 + \cdots + c_na_n = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$$

Linjära avbildningar: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

def. mängd målmängd

$\{Tx \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ = värdemängd

Matris för T: $T(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ med

$$A = [T(e_1) \cdots T(e_n)] \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Fallet $m = n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Inverterbara matriser: A inv. om $\exists\, A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

så att $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$.

Sats 2.3.8 om inv. matriser!

A inv. $\Leftrightarrow$ $Ax = b$ lösbart $\Leftrightarrow$ $\text{Col}\, A = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{Nul}\, A = \{0\}$

$\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank}\, A = n \Leftrightarrow \dim \text{Nul}\, A = 0$.

LU-faktorisering: Spara undan radoperationer

$$A = LU$$

radoperationerna trappstegsformen

Lös $LUx = b$ via $Ly = b$, $Ux = y$ (triangulära!)

Vektorrum

Mängd V av element vi kan addera etc. (10 krav)

Identifiera V med $\mathbb{R}^n$ via bas $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$

$b_k \in V$, lin. ober. och $\text{Span}\{b_1, \ldots, b_n\} = V$

$\Rightarrow \dim V = n$

Koordinatavbildning: $P_{\mathcal{B}}$: $\overset{\in V}{x} = P_{\mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}}^{\in \mathbb{R}^n}$

$\mathcal{B}$-koordinater

Om $V = \mathbb{R}^n$: $P_{\mathcal{B}} = [b_1 \cdots b_n]$, basbytesmatrisen.

Basbyte: $[x]_C = \underset{C\leftarrow B}{P} [x]_B$, $\underset{C\leftarrow B}{P} = \left[[b_1]_C \cdots [b_n]_C \right]$

Fungerar även när $V \neq \mathbb{R}^n$! $\underset{C\leftarrow B}{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Matrisen för $T: \underset{\text{bas } B}{V} \to \underset{\text{bas } C}{W}$:

$$[T(x)]_C = \left[[T(b_1)]_C \cdots [T(b_n)]_C \right] [x]_B$$

Underrum

$U \subset V$ underrum om $0 \in U$ och $au + bv \in U \ \forall \, a,b \in \mathbb{R}, \ u,v \in U$

Viktiga underrum ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$):
$\mathrm{Nul}\, A \subset \mathbb{R}^n$
$\mathrm{Col}\, A \subset \mathbb{R}^m$
$\mathrm{Row}\, A = \mathrm{Col}\, A^T \subset \mathbb{R}^n$

Rangsatsen: $\underbrace{\dim \mathrm{Col}\, A}_{\substack{= \mathrm{rank}\, A \\ = \#\{\text{pivot-kolonner}\}}} + \underbrace{\dim \mathrm{Nul}\, A}_{= \#\{\text{fria variabler}\}} = n \quad (A \in \mathbb{R}^{m\times n})$

Bassatsen: $\dim V = n \Rightarrow \{b_1, \dots, b_n\}$ bas om lin.ober. eller $\mathrm{Span}\{b_1, \dots, b_n\} = V$

Determinanter

Tal med egenskapen $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inv.

Iterativ definition via kofaktorexpansion: $(A = (a_{ij}))$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

eller i

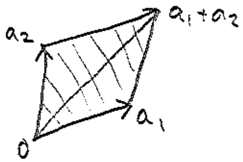
ta bort rad i och kolonn j från A

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$$\det EA = \begin{cases} \det A & \text{om } E \text{ motsv. "rad } i = \text{rad } i + r\cdot\text{rad } j\text{"} \\ -\det A & \text{om } E \text{ motsv. radbyte} \\ r\cdot\det A & \text{om } E \text{ motsv. "rad } i = r\cdot\text{rad } i\text{"} \end{cases}$$

$\Rightarrow \det AB = \det A \det B$

Tolkning: $A = [a_1 \; a_2] \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow \det A$ är arean av parallellogrammet



I 3D: volym av parallellpiped

Om $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lin.avb. (matris A) och $S \subset \mathbb{R}^3$: $\mathrm{vol}(T(S)) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}(S)$.

Egenvärden ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

$\lambda \in \mathbb{R}$ egenvärde, $x \neq 0$ egenvektor om $Ax = \lambda x$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ har icke-trivial lösning

$\Leftrightarrow A - \lambda I$ ej inv.

$\Leftrightarrow \underbrace{\overbrace{\det(A-\lambda I)}^{\text{karakteristiskt polynom}} = 0}_{\text{karakteristisk ekvation}}$

$A = (a_{ij})$ triangulär $\Rightarrow$ egenvärdena $= a_{ii}$, $i = 1, \dots, n$

Egenrum för λ_k: $E_k = \mathrm{Span}\{\text{alla egenvektorer till } \lambda_k\}$

A diagonaliserbar om:
- $*$ $\sum \dim E_k = n$
- $*$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinkta
- $*$ $A = A^T$ $\longrightarrow$ $= P^T$, ortogonal

$\Rightarrow A = \underbrace{P}_{\text{egenvektorer som kolonner}} \underbrace{D}_{\text{egenvärden på diagonalen}} \overbrace{P^{-1}}^{= P^T\text{, ortogonal}}$

$\Rightarrow$ Bas av egenvektorer (n st., lin.ober.) (för $\mathbb{R}^n$)

Lin. avb. $T(x) = Ax = PDP^{-1}x$

$\Rightarrow [T]_B = D$ dvs. $[T(x)]_B = D[x]_B$

matrisen för T i egenvektors-basen $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

Annat bra: $*$ $A^k = PD^kP^{-1}$

$*$ $x'(t) = Ax(t) \Rightarrow x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} v_n$

(via $y(t) = P^{-1}x(t) \Rightarrow y'(t) = Dy(t)$)

Ortogonalitet $u, v \in \mathbb{R}^n$

$u \cdot v = u^T v = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$, $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$

Ortogonala om $u \cdot v = 0$

Pythagoras sats: $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
(i $\mathbb{R}^n$)

$\{u_1, \dots, u_p\} \subset \mathbb{R}^n$ ortogonal om $u_i \cdot u_j = 0$, $i \neq j$

ortonormal om $\nearrow$ och $u_i \cdot u_i = 1$, $i = 1, \dots, p$.

$\Rightarrow$ lin. ober.

$\{x_1, \dots, x_p\}$ bas för $W \subset \mathbb{R}^n$

$\xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$ ortogonal bas $B = \{b_1, \dots, b_p\}$

$\xrightarrow{\text{normalisering}}$ ortonormal bas $\left\{\frac{b_1}{\|b_1\|}, \dots, \frac{b_p}{\|b_p\|}\right\}$

B-koordinater för $v \in W$: $v = c_1 b_1 + \dots + c_p b_p$ med

$$c_k = \frac{v \cdot b_k}{b_k \cdot b_k}$$

$x \notin W \Rightarrow \xrightarrow{\text{(med } v \to x)}$ den ortogonala projektionen av x på W:

$$\text{proj}_W x = \frac{x \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 + \dots + \frac{x \cdot b_p}{b_p \cdot b_p} b_p$$

$\mathrm{proj}_W x$ närmsta punkten i W till x:

$\|x - \mathrm{proj}_W x\| \leq \|x - v\| \quad \forall v \in W$

$x - \mathrm{proj}_W x$ ortogonal mot alla $v \in W$

$$\Rightarrow \quad x = \underbrace{\mathrm{proj}_W x}_{\in W} + \underbrace{(x - \mathrm{proj}_W x)}_{\in W^\perp} \quad \text{unik uppdelning!}$$

ortogonala komplementet till W

$$U = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{\|b_1\|} & \cdots & \frac{b_p}{\|b_p\|} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \mathrm{proj}_W x = UU^T x$$

Om $\underline{U \in \mathbb{R}^{n \times n}}$ med ortonormala kolonner: ortogonal

$\Rightarrow U^{-1} = U^T$!

QR-faktorisering: $A = QR$

ortonormala kolonner   övertriangulär

Minstakvadrat-metoden:

$Ax = b$ olösbart men $A^T A \hat{x} = A^T b$ lösbart

$\hat{x}$ minstakvadrat-lösning, minimerar $\|\underbrace{A\hat{x} - b}_{\text{residualen}}\|$

Kvadratiska former: $Q(x) = x^T A x$, $A^T = A$

Q positivt definit $\Leftrightarrow$ $Q(x) \geq 0$, $Q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Leftrightarrow$ Alla egenvärden till A är >0

Likuande för pos. semi-def., negativt (semi-) def., indefinit.