IDAG: Övningstenta

4h, 50p = 10·3p + 4·5p + bonus

$10\cdot 3p$: endast svar; $4\cdot 5p$: riktiga lösningar; bonus: max. 6p

Betyg 3: ≥ 20p 4: ≥ 30p 5: ≥ 40p

① Hur många lösningar har

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 1x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Totalmatris:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{bmatrix} -3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

unik lösning, så fortsätt:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

så SVAR: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

③ Bestäm en ortonormal bas för planet

$$\operatorname{Span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{x_2} \right\}.$$

Gram-Schmidt: $v_1 = x_1$, $v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{-5}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\{v_1, v_2\}$ ortogonal bas, så

SVAR: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} / \sqrt{5}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} / \sqrt{21} \right\}$.

④ Bestäm volymen av parallellpipeden P med hörn origo, $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_1}$, $\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{x_2}$ och $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{x_3}$

Volymen ges av $\det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$, så $\longrightarrow$

④ forts.

$$\mathrm{vol}(P) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

kofaktor exp. längs kolonn 1

$$= 1(-2-4) - 1(6-0) = -12$$

SVAR: $\mathrm{vol}(P) = -12$

⑥ Kar. ekv. och egenvärden för $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$?

Kar. ekv.:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \left.\begin{matrix} (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) \\ +3(2-\lambda) \\ -3(4-\lambda) \\ +6 \end{matrix}\right\} = 0$$

Egenvärdena är nollställena, så

SVAR: $(1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$, egenvärden $1, 2, 4$.

⑧ Klassificera kvad. formen $Q(x) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$.

Matrisform: $Q(x) = x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{A} x$

Egenvärden för A:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(2-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 6\lambda - 1$$

$$= (\lambda - 3)^2 - 10, \text{ så } \lambda = 3 \pm \sqrt{10}.$$

$\sqrt{10} > 3$ så $\lambda_1 < 0$ och $\lambda_2 > 0$.

SVAR: Indefinit.

9 Bas $B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{bmatrix}1\\4\\-1\end{bmatrix}}_{b_3} \right\}$.

B-koord. för $u = \begin{bmatrix}-1\\-7\\7\end{bmatrix}$ och standard koord. för $[v]_B = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$?

Vi har $x = P_B [x]_B = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix} [x]_B$

så $v = P_B [v]_B = \begin{bmatrix}5\\7\\-3\end{bmatrix}$. För $[u]_B$, lös $P_B [u]_B = u$:

Alt. B ortogonal!

$$\Rightarrow [u]_B = \begin{bmatrix}\frac{u\cdot b_1}{b_1 \cdot b_1}, & \frac{u \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2}, & \frac{u\cdot b_3}{b_3 \cdot b_3}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}6/2\\ 9/9\\ -36/18\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}$$

SVAR: $[u]_B = \begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix}5\\7\\-3\end{bmatrix}$.

---

10 Finns x så att $x = [x]_B$? Vad skulle x i så fall kallas?

med detta B.

I så fall, $x = P_B [x]_B = P_B x$, så x egenvektor till P_B.

Motsvarar egenvärde 1.

$$0 = \det(P_B - \lambda I) = (1-\lambda) \begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1-\lambda & 4\end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 8\right) - 8 - (1-\lambda)$$

så $\lambda = 1$ är <u>inte</u> ett egenvärde (det ger $0 = -8$)

SVAR: Nej, ingen egenvektor till basbytesmatrisen.

Nu tar vi de tre sista uppgifterna där utförligare lösning behöver redovisas.

Uppgift 11 har vi gjort flera gånger för andra A.

(12) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotation moturs med vinkel φ.

a) Visa att T linjär

b) Bestäm standardmatrisen för T.

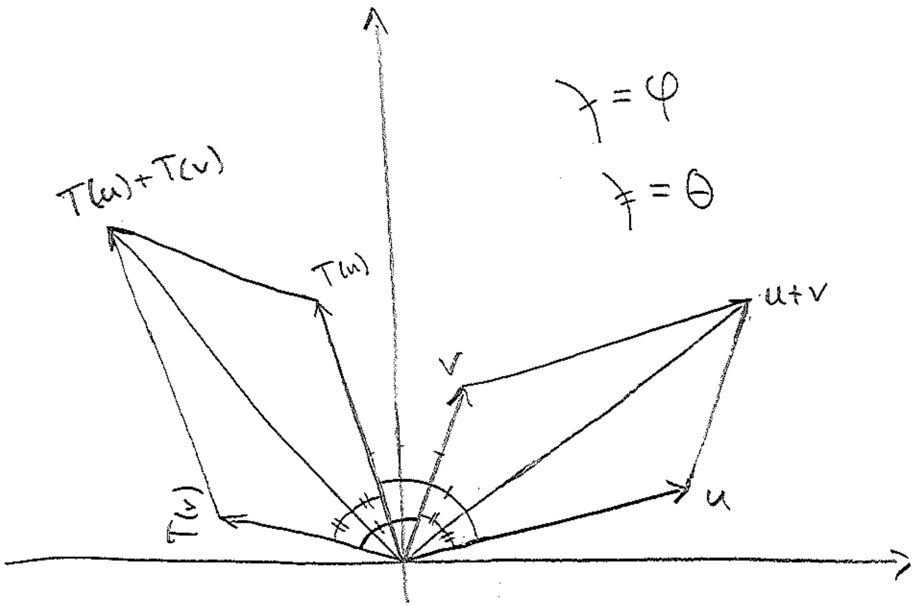
---

a) T är linjär om (I) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$

(II) $T(cu) = cT(u)$ $\forall u \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R}$

(II) följer direkt, då cu har samma riktning som u.

(I) Ses enklast geometriskt:

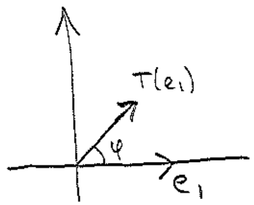


Vinkeln mellan $u+v$ och $T(u)+T(v)$ är

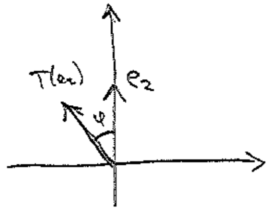
$$\varphi - \theta + \theta = \varphi \quad \Rightarrow \quad T(u+v) = T(u) + T(v).$$

b) Standardmatrisen är $A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix}$.

Vi ser att



och



dvs. $T(e_1) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$, $T(e_2) = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$

så standardmatrisen för T är

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

(13) Homogent L.E.S. med 7 ekv., 10 variabler har precis 5 icke-triviala, lin.ober. lösningar.

a) $\Rightarrow$ att det icke-homogena systemet alltid är lösbart?

b) Formulera satsen vi använde för a) och def. de två huvudkoncepten

---

a) Vi skriver systemet som $Ax = b$ med $A \in \mathbb{R}^{7\times 10}$. Vi vet att $\text{Nul}\, A = \text{Span}\{x_1, \dots, x_5\}$ där $\{x_1, \dots, x_5\}$ lin.ober. $\Rightarrow \dim \text{Nul}\, A = 5$

Rangsatsen ger att $\dim \text{Col}\, A = 10 - \dim \text{Nul}\, A = 5$.

Alltså är inte $\text{Col}\, A$ inte hela $\mathbb{R}^7$, så vi kan inte lösa det icke-homogena systemet för alla högerled $b \in \mathbb{R}^7$.

b) Sats (Rangsatsen)

Låt $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Då gäller att

$\text{rank}\, A = \dim \text{Col}\, A = \dim \text{Row}\, A$ och

$\text{rank}\, A + \dim \text{Nul}\, A = n$.

Def. Dimensionen av ett vektorrum V är antalet basvektorer i en bas för V. (Om $V = \{0\}$ så $\dim V = 0$.)

Def. Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ så är nollrummet till A mängden $\text{Nul}\, A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \vec{0}\}$

Kanske tycker man att $\text{Col}\, A$ är mer "huvudsakligt". I så fall:

Def. Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ så är kolonnrummet till A mängden $\text{Col}\, A = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n\}$.

(14) Kod:

```
t = [1.0; 1.1; 1.2; 1.3];
y = [2.5; 2.8; 2.8; 3.0];
X = [t.^0  t.^1  t.^2];
beta = (X'*X) \ (X'*y);
```

a) Vilken metod är detta?

b) Vad beräknas?

c) Formulering som minimeringsproblem? Visa att lösning till blir det som koden räknar ut.

Koden implementerar minstakvadratmetoden för att hitta en minstakvadratlösning. I det här fallet söks det bästa 2:a-grads-polynomet som ligger närmast punkterna (1.0, 2.5), (1.1, 2.8), (1.2, 2.8) och (1.3, 3.0).

Minstakvadratlösningen β minimerar $\|X\beta - y\|$.

Alltså är $X\beta$ den ortogonala projektionen av y på Col X.

$\Rightarrow \quad y - X\beta \in (\text{Col } X)^\perp$

Men vi vet att $(\text{Col } X)^\perp = \text{Nul}(X^T)$ så

$$X^T(y - X\beta) = 0 \quad \text{, dvs.}$$

$$X^T X \beta = X^T y \quad .$$

Detta β är precis vad koden beräknar.