

IDAG: Linjärt oberoende och linjära avbildningar

Mål (urval): Förstå begreppen
 Skriv linjära avbildningar på matrisform

Vi såg i F2 att frågan "har $Ax=0$ icke-triviala lösningar?" är riktig. Övn. 2.2.23 (kan göras nu)

visar att om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och $Ax=0$ endast har den triviala lösningen så är $Ax=b$ lösbar för alla b.

Detta motiverar:

Def. En mängd vektorer $\{v_1, \dots, v_p\}$ i \mathbb{R}^n är linjärt oberoende ifall ekvationen

$$c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = 0 \quad (*)$$

endast har lösningen $c_k=0, k=1, \dots, p$. Mängden är linjärt beroende annars, dvs. om det finns

$\{c_k\}_{k=1}^p$ med något $c_j \neq 0$ så att (*) håller, och (*) är då ett linjärt samband mellan v_1, \dots, v_p .

Dvs. om matrisen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ har linjärt oberoende kolonner så är $Ax=b$ lösbar.

(Vi ska studera dessa kopplingar i mer detalj i nästa läsvecka.)

Ex. Är vektorerna $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ lin. ober.?
 Vanlig (Tony)-förkortning för linjärt oberoende.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \leftarrow -3 \\ \leftarrow -5 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \leftarrow \times -2 \\ \leftarrow -2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Alltså är c_3 en fri variabel, så nej, $\{v_1, v_2, v_3\}$ är lin. ber.

Radkanonisk form: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$

ger t.ex. $c_3=1, c_2=-2, c_1=1$ så att

$$1v_1 - 2v_2 + 1v_3 = 0 \text{ är ett linjärt samband.}$$

(Kontrollera att det stämmer!)

Specialfall

(I) 1 vektor, $\{v_i\}$: $c_1 v_i = 0$, $c_1 \neq 0$?

Lin. ber. $\Leftrightarrow v_i = 0$.

(II) 2 vektorer, $\{v_1, v_2\}$: $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$, $c_1 \neq 0$ eller $c_2 \neq 0$?

Låt kravet vara $c_1 \neq 0$ (annars byt ordning).

Lin. ber. $\Leftrightarrow v_1 = -c_2/c_1 v_2 = \alpha v_2$.

(III) Sats 1.7.8: Fler än n vektorer i \mathbb{R}^n är alltid linjärt beroende.

Bervis: $Ax = 0$ motsvarar ett L.E.S. med n ekvationer och fler än n obekanta.

Dvs. det finns fria variabler och vi har en icke-trivial lösning. \square

(IV) Sats 1.7.9: Mängden $\{v_k\}_{k=1}^p$ där $v_j = 0$ för något j är alltid linjärt beroende.

Bervis: Antag $v_i = 0$ (annars omnumera). Då är

$$1v_i + 0v_2 + \dots + 0v_p = 0. \quad \square$$

Allmän karakterisering

Sats 1.7.7 Mängden $S = \{v_k\}_{k=1}^p$ är lin. ber. om

minst en v_j är en linjärkombination av de övriga vektorerna. Om $v_i \neq 0$ så gäller att något v_j , $j > 1$, är en lin.komb. av v_1, \dots, v_{j-1} .

Bervis: (\Leftarrow) Antag att $v_j = c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} + c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_p v_p$.

Då är $c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} - 1v_j + c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_p v_p = 0$, dvs.

S är lin. ber.

(\Rightarrow) Antag att S är lin. ber. Om $v_i = 0$ så är

$v_i = 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_p$ (dvs. en lin.komb.) Annars

har vi $v_i \neq 0$ och $c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = 0$.

Gå baklänges tills vi hittar ett $c_j \neq 0$ (garanterat

$j > 1$, annars får vi $c_1 v_1 = 0$ som är omöjligt då $v_1 \neq 0$),

dvs. $c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_p v_p = 0$. Men då har vi

$$c_j v_j = -c_1 v_1 - \dots - c_{j-1} v_{j-1}. \quad \square$$

Linjära avbildningar

$Ax=b \Leftrightarrow$ ett L.E.S.

Men vi kan också tolka Ax , "utan b ".

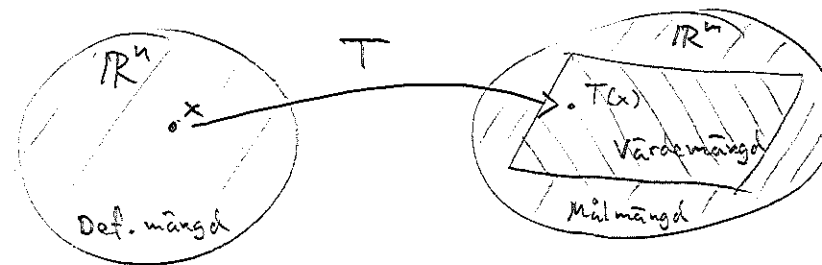
Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $x \in \mathbb{R}^n$ så är $Ax \in \mathbb{R}^m$,
dvs. vi kan se A som en funktion mellan \mathbb{R}^n och \mathbb{R}^m .

För att skilja på matrisen A och "funktionen A " brukar vi kalla funktionen för t.ex. T och säger att $T(x) = Ax$. Mer noggrant:

Def. En avbildning (eller funktion, transformation) T från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m är en regel som tilldelar ett element i \mathbb{R}^m till varje element i \mathbb{R}^n .

\mathbb{R}^n kallas avbildningens definitionsområde och \mathbb{R}^m dess målmängd. Vi skriver $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Om $x \in \mathbb{R}^n$ så kallas $T(x)$ bilden av x , och mängden $\{T(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ kallas T 's värdeområde.



OBS: En avbildning T behöver inte ges av $T(x) = Ax$ för en matris A , men vi kommer se att det gäller för alla linjära avbildningar:

Def. En linjär avbildning T uppfyller, för alla u, v i T 's def. mängd och för alla $c \in \mathbb{R}$,

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \text{och} \quad T(cu) = cT(u).$$

Alt. def.: $T(c_1v_1 + \dots + c_pv_p) = c_1T(v_1) + \dots + c_pT(v_p)$ (se lag),
dvs. "T bevarar lin. komb."

Om en avbildning ges av en matris A skriver vi den som $x \mapsto Ax$.

En typisk fråga i denna nya notation är

"Är b i värdemängden för avbildningen $T: x \mapsto Ax$?"

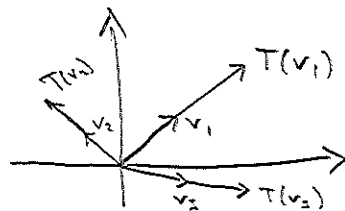
Detta betyder bara "Är $Ax=b$ konsistent?"

Lag p. 81 har utförligt exempel.

Geometriska exempel

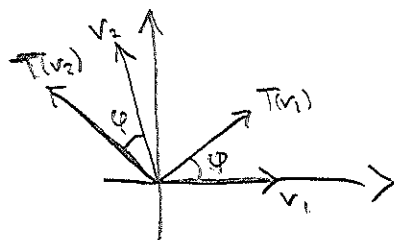
Skalning,

$x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x$



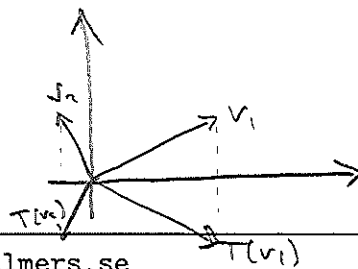
Rotation,

$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} x$



Spegling,

$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$



Fråga: Om vi vet de geometriska egenskaperna av avbildningen T , kan vi hitta en matris som beskriver T ?
 den linjära

Svar: Ja! Och det räcker att veta vad T gör med enhetsvektorena, $e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.
 plats j

Antag $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Då har vi $x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

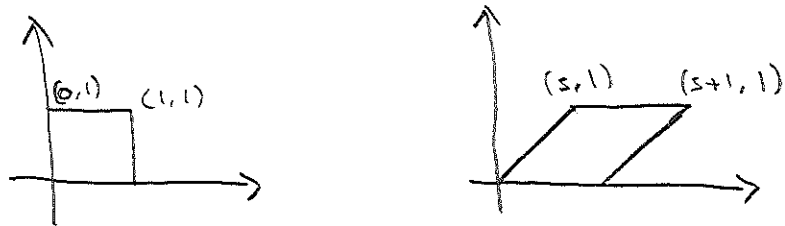
så $T(x) = T(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + x_3 T(e_3)$.
 linjär

Vi kan också skriva detta som

$$T(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x$$

Sats 1.9.10: Låt $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Då finns det precis en matris sådan att $T(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$. Denna $m \times n$ -matris kallas standardmatrisen för T och ges av $A = [T(e_1) \dots T(e_n)]$. Bevis: se lag.

Ex. Avbildningen T som transformerar enhetskvadraten enligt



kallas en skjuvning (eng.: shear).

Vi ser att $T(e_1) = e_1$ och $T(e_2) = \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}$.

Alltså har vi standardmatrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Kontroll: $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Mer funktionsnotation

Def. En avbildning $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är surjektiv (alt. "på") om dess värdemängd är \mathbb{R}^m .

Dvs. om en surjektiv avb. T har standardmatrisen A så har alltid $Ax=b$ en lösning.

Def. En avbildning $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är injektiv om varje $b \in \mathbb{R}^n$ är bilden av högst ett $x \in \mathbb{R}^n$.

OBS: Kan vara inget x för vissa b !

Alt. def.: T är injektiv ifall $T(x)=T(y)$ betyder att $x=y$.

Dvs. $Ax=b$ har antingen ingen lösning eller en unik lösning.

Ex. Avbildningen

$T: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$ är både surjektiv och injektiv

$T: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ är ingetdera (kan inte nå t.ex. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, och $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix})$.)

$T: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$ är surjektiv men inte injektiv
($T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$)

$T: x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ är inte surjektiv, men injektiv.
(kan inte nå t.ex. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$)

Sats 1.9.11 Låt $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^u$ vara en linjär avb. ^{notera n!}
 Då är T injektiv om $T(x)=0$ endast har den triviala lösningen.

Bevis: Vi vet att $T(0)=0$ (linjär).

Injektiv \Rightarrow ingen annan lösning.

Inte injektiv: Det finns b och $u, v \in \mathbb{R}^u$
 så att $T(u)=T(v)=b$ och $u \neq v$.

T linjär $\Rightarrow T(u-v) = T(u) - T(v) = b - b = 0$

dvs. $x=u-v \neq 0$ är en annan lösning till $T(x)=0$. \square

Sats 1.9.12 Låt $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avb.
 med standardmatrisen A . Då gäller

Ⓘ T är surjektiv om A 's kolonner spänner upp \mathbb{R}^m .

Ⓜ T är injektiv om A 's kolonner är linjärt oberoende.

Bevis: Se hay.

Som ni ser så kan man se samma sak på många olika sätt, och de har alla olika fördelar.

Ta en definition i taget!