

IDAG: Matris algebra

Mål: Räkna med matriser
(urval)

Förstå och använda inversen av en matris

I F1 jobbade vi med totalmatrisen $[A \ b]$ för ett L.E.S. och i F2 gick vi över till koef. matrisen A .
I F3 såg vi att en matris kan ses som en linjär avbildning.

Nu vill vi manipulera matriser, t.ex. addera eller multiplicera dem.

Först lite notation:

$A = (a_{ij})$ betyder att A har elementet a_{ij} på plats (i,j) ,
dvs. rad i , kolonn j .

$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ betyder att A har kolonnerna a_1, \dots, a_n

$O_{m \times n} = (0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kallas noll-matrisen (av storlek $m \times n$)

I_n betecknar identitetsmatrisen i $\mathbb{R}^{n \times n}$ som har värdet 1 på diagonalen (plats (i,i)) och värdet 0 annars.

Def. Låt $A = (a_{ij})$ och $B = (b_{ij})$ vara $m \times n$ -matriser.
Då är $A = B$ om $a_{ij} = b_{ij}$ för $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Vidare är

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \text{ och } cA = (ca_{ij}) \text{ för alla } c \in \mathbb{R}.$$

Dvs. komponentvis addition och mult. med skalär.

Precis som för vektorer får vi direkt att (t.ex.)

$$A + (B + C) = (A + B) + C \text{ och } A + B = B + A$$

Se Lag Sats 2.1.2!

För vektorer kunde vi inte definiera produkter (skalärprodukten ger inte en vektor som resultat),
men för matriser är det naturligt.

Antag att $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ och $x \in \mathbb{R}^r$. Då är

$$Bx \in \mathbb{R}^n \text{ och } A(Bx) \in \mathbb{R}^m.$$

Men $Bx = x_1 \vec{b}_1 + \dots + x_r \vec{b}_r$, så

$$\begin{aligned} A(Bx) &= x_1 A\vec{b}_1 + \dots + x_r A\vec{b}_r \\ &= [A\vec{b}_1 \ \dots \ A\vec{b}_r] x, \text{ där } A\vec{b}_k \in \mathbb{R}^m, k=1, \dots, r. \end{aligned}$$

Därför definierar vi

Def. Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ så ges produkten av A och B av $AB \in \mathbb{R}^{m \times r}$, där $AB = [A\vec{b}_1 \ \dots \ A\vec{b}_r]$.

OBS: Bara def. om dimensionerna stämmer!

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ger

$$AB = \left[A \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

För att kontrollera om flera matriser är multiplicerbara kan man skriva ner deras dimensioner som $m \times n \quad n \times r \quad r \times s \quad s \times p$

Om talen mellan två kryss är samma "går det ihop".

Här blir slutresultatet en $m \times p$ -matris.

OBS 1: Även om AB är def. behöver inte BA vara def!

Dvs. $AB \neq BA$ i allmänhet. Ifall $AB=BA$ säger vi att A och B kommuterar.

OBS 2: $AB=AC \not\Rightarrow B=C$. (Övning 2.1.10.)

OBS 3: $AB=0 \not\Rightarrow A=0$ eller $B=0$ (Övning 2.1.12.)

"Rad-kolonn-regeln"

Vi såg i F2 att $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} (1,2) \cdot x \\ (3,4) \cdot x \end{bmatrix}$,

där \cdot betecknar skalärprodukten.

Detta ger att

Elementet på plats (i,j) i AB ges av skalärprodukten av den i :te raden i A och den j :te kolonnen i B .

Dvs.

$$(AB)_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}) = \text{row}_i(A) \cdot \text{col}_j(B) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Ex. $A \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{4 \times 2} \Rightarrow AB \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Notera att rad 1 ges av $[a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14}] \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{bmatrix} = B$.

Generellt:

$$\begin{aligned} \text{row}_i(AB) &= \text{row}_i(A) B \\ \text{col}_j(AB) &= A \text{col}_j(B). \end{aligned}$$

Fler matrisoperationer

Def. Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och k ett heltal så definierar vi potensen $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ st.}}$ och $A^0 = I_n$.

Tänk igenom varför A måste vara kvadratisk ($n \times n$) här.

Def. Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definierar vi transponatet av A som $n \times m$ -matrisen A^T , vilken ges av $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$.

Dvs. A^T 's kolonner är A 's rader och vice versa.

Man visar lätt (övn. 2.1.33!)

Sats 2.1.3

- $\textcircled{\text{I}}$ $(A^T)^T = A$
- $\textcircled{\text{II}}$ $(cA)^T = cA^T, c \in \mathbb{R}$
- $\textcircled{\text{III}}$ $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $\textcircled{\text{IV}}$ $(AB)^T = B^T A^T$.

Notera $\textcircled{\text{IV}}$: omvänd ordning!

Matrisinversen

Vi har redan en additiv invers för matriser:

$$A + (-A) = 0 = -A + A.$$

Nu definierar vi en multiplikativ invers:

Def. Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar om det finns en matris C så att $CA = AC = I_n$. I så fall är C unik (se Lag). Vi kallar den inversen till A och betecknar den A^{-1} .

Def. Om A inte är inverterbar säger vi att den är singulär. (Inverterbara matriser kallas ibland icke-singulära.)

Specialfall

* Om $A \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, dvs. $A = (a)$, $a \in \mathbb{R}$, så är A inverterbar om $a \neq 0$ och inversen är $A^{-1} = (\frac{1}{a})$.

* Sats 2.2.4 Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Då är A inv.

om $ad - bc \neq 0$ och $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Annars är A singulär.

Kontroll: $AA^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -bc + ad \end{bmatrix} = I_2$

Bevis: Övn. 2.2.25, 2.2.26.

Allmänna fallet snart, först lite konsekvenser:

Egenskaper

Sats 2.2.6

- Ⓘ A inv. $\Rightarrow A^{-1}$ inv. och $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Ⓜ $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, båda inv. $\Rightarrow AB$ inv. och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- ⓓ A inv. $\Rightarrow A^T$ inv. och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Bevis: Ⓜ: $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = I_n = AIA^{-1} = ABB^{-1}A^{-1}$

Ⓘ, ⓓ: se Lag.

(Jämför Sats 2.1.3 ⓓ)

Sats 2.2.5 Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar så har

$Ax = b$ en unik lösning för alla $b \in \mathbb{R}^n$

som ges av $x = A^{-1}b$.

Bevis: Låt $b \in \mathbb{R}^n$ och sätt $x = A^{-1}b$. Då är $Ax = A^{-1}Ab = b$, så vi har minst en lösning. Den är unik eftersom $Ay = b \Rightarrow \frac{A^{-1}Ay}{=I_n} = \frac{A^{-1}b}{=x} \Rightarrow y = x$. \square

Fråga: Hur hittar vi A^{-1} för $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n > 2$?

Kort svar: Radreducera $[A \ I_n]$.

Längre svar:

Vi kan uttrycka de tre elementära radoperationerna som matrismultiplikationer (från vänster).

$$\underline{\text{Ex.}} \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = I_3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ så}$$

$$E_1 A = A - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \text{ dvs. subtrahera } 2 \times \text{rad } 2 \text{ från rad } 3.$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ byter plats på rad } 2 \text{ och rad } 3$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ skalar om rad } 1 \text{ med faktorn } 2$$

Dessa typer av matriser kallas elementära matriser.

Vi kan bestämma dem genom att utföra den önskade radoperationen på I_n , eftersom t.ex. $E_1 I = E_1$.

Sats En elementär matris är inverterbar.

Bervis: Detta följer direkt från att radoperationer är reversibla.

Sats 2.2.7 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar om A är radekvivalent med I_n .

De radoperationer som reducerar A till I_n reducerar I_n till A^{-1} .

Bervis: (\Rightarrow): A inv. $\implies Ax = b$ lösbart för alla $b \implies$
sats 2.2.5

$\implies A$ har en pivotposition i varje kolonn
sats 2.1.4

\implies Den radkanoniska formen av A är I_n .
 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(\Leftarrow): Om $A \sim I_n$ kan vi skriva radreduceringen som

$$E_p E_{p-1} \cdots E_2 E_1 A = I_n, \text{ där } E_k \text{ är elementära matriser.}$$

Men E_k är inverterbar, så även $E_p \cdots E_1$ är inverterbar.
(Sats 2.2.6)

$$\Rightarrow A = (E_p \cdots E_1)^{-1} \underbrace{(E_p \cdots E_1) A}_{= I_n} = (E_p \cdots E_1)^{-1}.$$

Alltså är A inv. och $A^{-1} = E_p \cdots E_1$, dvs.

$$A^{-1} = E_p \cdots E_1 I_n. \quad \square$$

För att bestämma A^{-1} kan vi alltså radreducera $[A \ I_n]$. Detta kommer antingen ge $\sim [I_n \ A^{-1}]$ eller visa att A är singular.

OBS Beräkna bara A^{-1} för att titta på dess struktur, aldrig för att lösa $Ax=b$.

Att radreducera $[A \ b]$ är både billigare och mer felsäkert.

[Sats 2.3.8. om inv. matriser på
nästa sida.]

Sats 2.3.8 (Satsen om inv. matriser)

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

\exists betyder "det existerar"
 \forall betyder "för alla"
 s.a. = så att

