

IDAG: Baser och koordinatsystem

Mål: Identifiera vektorrum med \mathbb{R}^n
via baser

För ett godtyckligt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

har vi $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

där $e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$
↑
plats j

är den j:te enhetsvektorn.

Vi kallar $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ en bas för \mathbb{R}^n
och $[x]_B = (x_1, \dots, x_n)$ koordinaterna för x i basen B .

(I det här fallet är $[x]_B = x$ då B är standardbasen.)

Def. En bas för ett vektorrum V är en mängd $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ av linjärt oberoende vektorer som spänner upp V .
Koordinaterna för $x \in V$ i basen B ges av koefficienterna $[x]_B = (c_1, \dots, c_n)$, där $x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$.

OBS 1: Definitionen av koordinater är vettig då dessa är unika: $c_1 b_1 + \dots + c_n b_n = d_1 b_1 + \dots + d_n b_n$
 $\Rightarrow (c_1 - d_1) b_1 + \dots + (c_n - d_n) b_n = 0$

$\xrightarrow{B \text{ lin. ober.}} \Rightarrow c_k - d_k = 0, k=1, \dots, n$ dvs. $c_k = d_k$.

OBS 2: $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ är alltså en bas för \mathbb{R}^n då lin. ober. och $\text{Span}\{e_1, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$

OBS 3: Vi får direkt att om $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ är lin. ober. så är B en bas för $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$.
(Kom ihåg att detta är ett vektorrum! ↗)

En bas för V innehåller minsta tillräckliga information som beskriver V :

* tar vi bort vektorer ur basen kan vi inte längre nå hela V , och

* lägger vi till fler vektorer till basen är de inte längre lin.ober.

Ex. $B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_2} \right\}$ är en bas för \mathbb{R}^2 , ty

$v_2 \neq C v_1 \Rightarrow$ lin.ober., och

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 2 & 4 & y_2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & -2 & y_2 - 2y_1 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Span}\{v_1, v_2\} = \mathbb{R}^2.$$

Men $\text{Span}\{v_1\} \neq \mathbb{R}^2$, så ingen bas. Och eftersom

B är en bas kan vi för alla $v_3 \in \mathbb{R}^2$ skriva

$$v_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\} \text{ är lin.ber.} \Rightarrow \text{ingen bas.}$$

Sats 4.3.5 Låt $v_1, \dots, v_p \in V$ och sätt $U = \text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$. Om v_j är en lin.komb. av de övriga vektorerna så är även $\text{Span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_p\} = U$.

Om $U \neq \{0\}$ så är någon delmängd av $\{v_1, \dots, v_p\}$ en bas för U .

Berisidé: $x \in U \Rightarrow x = c_1 v_1 + \dots + c_p v_p$

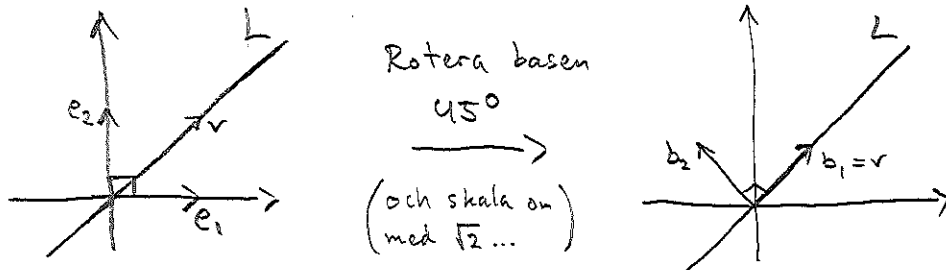
$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} + c_j (a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \dots + a_p v_p) + c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_p v_p \\ &= (c_1 + c_j a_1) v_1 + \dots + (c_{j-1} + c_j a_{j-1}) v_{j-1} + (c_{j+1} + c_j a_{j+1}) v_{j+1} + \dots + (c_p + c_j a_p) v_p \end{aligned}$$

Om $\{v_1, \dots, v_p\}$ är lin.ber. (dvs. inte en bas), ta bort vektorer ent. ovan tills de kvarvarande är lin.ober. "D"

$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ kallas standardbasen för \mathbb{R}^n , och när vi skriver $x = (x_1, \dots, x_n)$ menar vi koordinaterna för x i denna bas.

Men vi kan använda en annan bas ifall det underlättar!

Ex. Låt $v = (1, 1)$. Linjen $L = \{cv \mid c \in \mathbb{R}\}$ har standardkoordinaterna (c, c) . Ta istället basen $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, så har vi koordinaterna $[cv]_B = (c, 0)$.



Ex. forts.

En bas för underrummet L ges av $\{v\}$ - här behövs bara en koordinat.

Def. Låt $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vara en bas i \mathbb{R}^n .

Vi kallar $P_B = [b_1 \ \dots \ b_n]$

koordinatbytesmatrisen.

Vi har $x = P_B [x]_B$, dvs. P_B transformerar B -koordinater till standardkoordinater.

För att gå åt andra hållet måste vi lösa ett L.E.S.:

Matrisen P_B^{-1} transformerar standardkoordinater till B -koordinater.

(Varför är P_B inverterbar?)

Basbyte (i \mathbb{R}^n)

Låt $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ och $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ vara två baser i \mathbb{R}^n . Vi vet att

$$P_B: [x]_B \mapsto x \quad \text{och} \quad P_C^{-1}: x \mapsto [x]_C. \quad \text{Alltså:}$$

$$\boxed{\text{Matrisen } P_C^{-1} P_B: [x]_B \mapsto [x]_C}$$

Vi kan hitta denna basbytesmatris genom att radreducera

$$[P_C \ P_B] = [c_1 \ \dots \ c_n \mid b_1 \ \dots \ b_n] \sim [I_n \mid P_C^{-1} P_B]$$

Om vi inte är i \mathbb{R}^n utan har en bas

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ för V kan vi inte prata

om P_B då $b_k \in V \neq \mathbb{R}^n$.

Vi kan dock fortfarande prata om $x \mapsto [x]_B$, som vi kallar en koordinatavbildning.

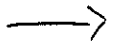
Eftersom den avbildar V på \mathbb{R}^n kan vi nu identifiera ett $x \in V$ med ett element i \mathbb{R}^n .

Faktiskt även tvärtom:

Sats 9.4.8: Koordinatavbildningen $T: V \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto [x]_B$ är linjär och inverterbar.

Bevis: Läs (övn.).

Vi kan alltså identifiera V med \mathbb{R}^n så fort vi har en bas. T är en så kallad isomorfism.



Basbyte i V Sats 4.7.15

Låt $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ och $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ vara två baser för vektorrummet V . Då finns

en unik matris $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sådan att

$[x]_C = P_{C \leftarrow B} [x]_B$ för alla $x \in V$. Den ges av

$$P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} [b_1]_C & \dots & [b_n]_C \end{bmatrix}.$$

Vidare är $P_{C \leftarrow B}$ inverterbar och $(P_{C \leftarrow B})^{-1} = P_{B \leftarrow C}$.

Bevis Existens: Vi har

$$x = ([x]_B)_1 b_1 + \dots + ([x]_B)_n b_n,$$

så eftersom $x \mapsto [x]_C$ är linjär får vi

$$\begin{aligned} [x]_C &= ([x]_B)_1 [b_1]_C + \dots + ([x]_B)_n [b_n]_C \\ &= \begin{bmatrix} [b_1]_C & \dots & [b_n]_C \end{bmatrix} [x]_B. \end{aligned}$$

(Notera att $[b_j]_C$ är C -koordinaterna för den j :te B -basvektorn.)

Unik: Antag att $[x]_C = Q [x]_B$ för alla $x \in V$, med någon annan matris Q .

$$\text{Ta } x = b_1: [b_1]_B = (1, 0, 0, \dots, 0) = e_1$$

$$\Rightarrow [b_1]_C = Q e_1 = \text{col}_1(Q)$$

På samma sätt blir $[b_j]_C = Q e_j = \text{col}_j(Q)$

$$\text{Dvs. } Q = \begin{bmatrix} [b_1]_C & \dots & [b_n]_C \end{bmatrix} = P_{C \leftarrow B} \quad \square$$