MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Tony Stillfjord
Telefonvakt: xxx, tel. xxx

TMV166 2016
xxxx kl. xxxx (var)
Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom presentation av kryssuppgifter. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Tony

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

---

1. Ange hur många lösningar följande ekvationssystem har: (3p)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 1x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Om det finns precis en lösning, ange även denna.

[Mål: (1.1) lösa linjära ekvationssystem med eliminationsmetoden]

SVAR: Lösningen är $(x_1, x_2, x_3) = (2, -2, 1)$.

2. Låt $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ d \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. För vilka reella tal d ligger x i det plan som spänns upp av u och v? (3p)

[Mål: (1.3) avgöra om en vektor tillhör linjära höljet (span) av givna vektorer.]

SVAR: $d = 18$.

3. Bestäm en ortonormal bas för planet i föregående uppgift. (3p)

[Mål: (6.4) tillämpa Gram-Schmidt processen för att bestämma en ortogonal bas för ett underrum W i R^n utgåaende från en annan bas för W. *och* (6.2) förklara vad som menas med ortonormerad bas för ett underrum W]

SVAR: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

4. En parallellpiped P har de fyra närliggande hörnen origo, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. (3p)

Bestäm volymen av P.

[Mål: (3.1) beräkna determinanten för en matris av godtycklig storlek med hjälp av Sats 3.1.1]

SVAR: $\text{vol}(P) = 12$

5. Ange den ortogonala projektionen av $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ på linjen som spänns upp av $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$. (3p)

[Mål: (6.2) använda projektionsformeln 6.2.(2) i problemlösning]

SVAR: $\text{proj}_v\, x = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$

6. Bestäm den karakteristiska ekvationen för matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ och ange dess egenvärden. (3p)

[Mål: 5.2 förklara varför lösningarna till den karakteristiska ekvationen till en matris är matrisens egenvärden.

SVAR: $(1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$, egenvärdena är 1, 2 och 4.

7. Matrisen A har en diagonalisering som ges av (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm $A^{17}b$ för $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$.

[Mål: (5.3) beräkna potenser av en matris med hjälp av diagonalisering]

SVAR: $A^{17}b = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

8. Är den kvadratiska formen $4x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$ positivt (semi-)definit, negativt (semi-)definit eller indefinit? (3p)

[Mål: (7.2) förklara vad som menas med positivt definit, negativt definit och indefinit kvadratisk form och tillämpa sats 7.2.5 för klassificering av kvadratiska former.]

SVAR: Indefinit.

9. Låt en bas $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ för $\mathbb{R}^3$ ges av $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $b_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T$. Ange B-koordinaterna för vektorn $u = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 7 \end{bmatrix}^T$ och standardkoordinaterna för vektorn v med B-koordinaterna $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. (3p)

[Mål: 2.9 definiera begreppet koordinater för en vektor relativt en bas och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas för ett underrum i $\mathbb{R}^n$]

SVAR: $[u]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ och $v = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -3 \end{bmatrix}^T$.

10. Med basen B från föregående uppgift, finns det en icke-trivial vektor vars B-koordinater är detsamma som dess standardkoordinater? Vad skulle en sådan vektor i så fall kallas? (3p)

[Mål: som föregående uppgift *och* (5.1) definiera begreppen egenvektor och egenvärde]

SVAR: Nej, det finns ingen sådan egenvektor.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Tony Stillfjord
Telefonvakt: xxx, tel. xxx

TMV166 2016
xxxx kl. xxxx (var)
Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	**Svar**	**Poäng**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		