TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Kryssuppgifter läsvecka 5

1. Beräkna volymen av den parallellpiped som har de fyra närliggande hörnen $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2. Om talen $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ är givna så kan man visa att $n \times n$-matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

uppfyller

$$\det\big(tI_n - C\big) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0.$$

Visa detta för $n = 4$. (Eller för alla n, för de riktigt ambitiösa). På engelska kallas C för *companion matrix* då den via detta samband går hand i hand med det givna polynomet. Notera att egenvärdena till C ges av rötterna till polynomet, då $\det\big(C - \lambda I_n\big) = (-1)^n \det\big(\lambda I_n - C\big)$.

3. En matris A och dess diagonalisering ges av ekvationen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & d \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

På grund av en korrupt hårddisk saknas data för värdena a, b, c och d. Återskapa dessa utifrån vad du vet om egenvärden och egenvektorer (utan att utföra matris-matris-multiplikationen och lösa det resulterande ekvationssystemet).

4. I kryssuppgifterna för LV3 definierades en nilpotent matris som en matris A för vilken $A^k = 0$ men $A^j \neq 0$ för $j = 0, \ldots, k-1$. Visa att

   (a) En nilpotent matris A är inte inverterbar. [Tips: använd att $\det(AB) = \det A \det B$.]

   (b) Om en nilpotent matris A är diagonaliserbar så är $A = 0$. [Tips: vad blir A^k?]