TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Kryssuppgifter läsvecka 6

1. Låt ett system av differentialekvationer ges av

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{med} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   Bestäm alla lösningar $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$.

2. Låt en bas för planet $U \subset \mathbb{R}^3$ ges av vektorerna $b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Låt $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vilken är den närmsta punkten i U till x? Vad är avståndet mellan dem?

   (b) Samma som i a) men med punkten $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. Låt W vara det plan i R^4 som ges av ekvationen $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Bestäm en ortonormal bas för W.

4. I ett exempel på föreläsning 13 lät vi U vara det underrum till $\mathbb{R}^3$ som ges av

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \right\}.$$

   En bas för U ges av vektorerna $c_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $c_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Låt nu T vara den ortogonala projektionen på U. Vi bestämde $T(b_k)$ för några vektorer b_k men *inte* genom att använda projektionsformeln som gavs i föreläsning 14.

   (a) Varför har vi *inte* t.ex. $T(b_1) = \frac{b_1 \cdot c_1}{c_1 \cdot c_1} c_1 + \frac{b_1 \cdot c_2}{c_2 \cdot c_2} c_2$ här?

   (b) Visa att *normalvektorn* $n = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ är ortogonal mot U.

   Det senare gör att n spänner upp $U^\perp$ eftersom $\dim U = 2$ betyder att vi måste ha $\dim U^\perp = 3 - 2 = 1$. Alltså fungerar föreläsningens metod; $T(x) = x - \frac{x \cdot n}{n \cdot n} n$, där $\frac{x \cdot n}{n \cdot n} n$ är projektionen på $U^\perp$.