TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Kryssuppgifter läsvecka 7, del 1

1. *Speglingen* av $x \in \mathbb{R}^n$ i ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ ges av punkten

$$y = \mathrm{proj}_W\, x + (\mathrm{proj}_W\, x - x) = 2\,\mathrm{proj}_W\, x - x,$$

där $\mathrm{proj}_W\, x$ är den ortogonala projektionen av x på W. Bestäm speglingen av $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ i planet

$$W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. Bestäm baser för nollrummet och kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

3. Använd definitionen av norm för att visa parallellogramlagen: För alla $u, v \in \mathbb{R}^n$ gäller att

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\,\|u\|^2 + 2\,\|v\|^2.$$

4. En matris $B = (b_{ij})$ är *symmetrisk* om $b_{ij} = b_{ji}$ för $1 \le i, j \le n$ och *anti-symmetrisk* om $b_{ij} = -b_{ji}$ för $1 \le i, j \le n$. Låt nu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^n$ och visa att

   (a) Matrisen $C = \frac{A+A^T}{2}$ är symmetrisk.

   (b) Matrisen $D = \frac{A-A^T}{2}$ är anti-symmetrisk.

   Alltså kan vi alltid dela upp $A = C + D$ i symmetriska och anti-symmetriska delar!