RÖ1 / Linjära ekvationssystem 1.1.18, 1.2.11, 1.3.13, 1.5.11

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 \quad\quad - x_3 = 3 \end{cases}$$

vill lösa linjära ekvationssystem som detta.

Metod: 1. Skriv på utvidgad matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

2. Fixa nollor nedanför diagonalen genom att addera/subtrahera multiplar av raderna (ekvationerna) till varandra och flytta runt rader.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right]$$

3. Fixa nollor ovanför diagonalen och ettor på diagonalen på samma sätt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

4. Lösningen finns i kolumnen längst till höger

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tre saker kan hända

① Exakt en lösning finns
② Oändligt många lösningar
③ Lösning saknas

① $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1) \\ \downarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \left(-\frac{1}{2}\right) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \uparrow \\ (-1) \end{array} \sim$$

exakt en lösning finns om vi kan få fram en enhetsmatris här.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

② $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 = -6 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ \downarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \leftarrow \frac{\text{nollrad}}{x_2 \text{ fri}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 3 \\ x_2 = \text{fri} \end{cases}$$

③ $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \updownarrow \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ \downarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{array}\right] ??$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 3 \\ 0 = 10 \quad ?? \text{ omöjligt} \Rightarrow \text{ingen lösning.} \end{cases}$$

är planen $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$, $x_2 - x_3 = 1$, och $x_1 + 3x_2 = 0$ varandra?

skär är det i en punkt där alla ekv. är uppfyllda. => kolla om system har en lösning.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right] \overset{(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$x_2 - x_3 = 1$$
$$0 = -5 \quad ?? \quad \Rightarrow \text{saknar lösning}$$

lanen skär ej varandra.

1.2.11. Lös ekvationssystemet som har den utvidgade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} 3 \;\; 2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \frac{1}{3} \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

två nollrader
=> två fria variabler

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3$$

$x_2 =$ fri

$x_3 =$ fri

fria variabler, dvs vi kan sätta x_2, x_3 till vad som helst och få en lösning som uppfyller denna ekv.

1.3.13. Är $\mathbb{b}$ en linjärkombination av kolumnerna i A, då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \ ?$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 & \mathbb{a}_3 \end{array}$$

Frågan är, gäller $\mathbb{b} = c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + c_3\mathbb{a}_3$ för några konstanter c_1, c_2, c_3?

Vi har

$$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + c_3\mathbb{a}_3 = [\mathbb{a}_1 \ \mathbb{a}_2 \ \mathbb{a}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{c}} = A\mathbb{c}$$

Dvs har $A\mathbb{c} = \mathbb{b}$ en lösning?

Kolla utvidgade matrisen!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ -2 & 8 & -4 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} ② \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right] \leftarrow 0 = 9 \Rightarrow \text{lösning saknas}$$

$\Rightarrow$ det finns inga c_1, c_2, c_3 så att $c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + c_3\mathbb{a}_3 = \mathbb{b}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{b}$ är <u>inte</u> en linjärkombination av kolumnerna i A.

1.5.11. Skriv lösningen till $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ på parameterform då den utvidgade matrisen är radekvivalent med

$$[A\,|\,\mathbf{0}] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2 \\ -3 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$\uparrow$ pivot $\quad \uparrow$ pivot $\quad \uparrow$ pivot

$$\begin{aligned} x_1 &= 4x_2 - 5x_6 \\ x_2 &= x_2 \quad (\text{fri}) \\ x_3 &= x_6 \\ x_4 &= x_4 \quad (\text{fri}) \\ x_5 &= 4x_6 \\ x_6 &= x_6 \quad (\text{fri}) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Metod</u>: 1. Skriv ekv. systemet på utvidgad matrisform

2. Radreducera så långt som möjligt.

3. Notera vilka kolumner som är pivot. Övriga kolumner ger de fria variablerna

4. Skriv lösningen som linjärkombination av de fria variablerna