Rö? : Linjärt beroende, linjära transformationer 1.7.9, 1.9.11

vi har tre vektorer $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$.

Linjärkombination (av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$) : om c_1, c_2, c_3 är konstanter så är

$$\mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2 + c_3\mathbb{v}_3$$

en linjärkombination av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$

Linjärt beroende : $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ är linjärt beroende om

$$c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2 + c_3\mathbb{v}_3 = \mathbb{0} \iff [\mathbb{v}_1 \ \mathbb{v}_2 \ \mathbb{v}_3]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

har en lösning $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ där minst en av $c_1, c_2, c_3 \neq 0$.

Linjärt oberoende : $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ är linjärt oberoende om

$$c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2 + c_3\mathbb{v}_3 = \mathbb{0}$$

endast har lösningen $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Spannet av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$:

$$\text{span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\} = \{\mathbb{v} : \mathbb{v} = c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2 + c_3\mathbb{v}_3,\ c_1, c_2, c_3 \text{ konstanter}\}$$

Alla vektorer vi kan få som linjärkombinationer av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$.

1.7.9. Låt $\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\mathbb{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix}$.

a) För vilka h är $\mathbb{v}_3$ i $\operatorname{span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\}$?

b) För vilka h är $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ linjärt beroende?

a) För vilka h finns konstanter c_1, c_2 så att $\mathbb{v}_3 = c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2$?

$$c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2 = [\mathbb{v}_1 \ \ \mathbb{v}_2]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbb{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix} \iff$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & h \end{array}\right] 3 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 2 & -6 & h \end{array}\right] \leftarrow \text{saknar lösn} \Rightarrow$$

$\mathbb{v}_3$ ej i $\operatorname{span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\}$ för något h eftersom vi inte kan välja h så att detta får en lösning.

b) Vill hitta de h så att $c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2 + c_3\mathbb{v}_3 = \mathbb{0}$ har en nollskild lösning.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ -3 & 9 & -7 & 0 \\ 2 & -6 & h & 0 \end{array}\right] 3\ 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & h-10 & 0 \end{array}\right] \tfrac{-1}{8}(h-10) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ej pivot $\Rightarrow$ c_2 fri $\Rightarrow$ vilket h vi än tar kommer c_2 vara fri

$\Rightarrow$ Det finns oändligt många nollskilda lösningar vilket h vi än tar

$\Rightarrow$ $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ linjärt beroende för alla h

$\Rightarrow$ $c_1 = 3c_2$ $\Rightarrow$
$c_3 = 0$

t.ex. $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ är en nollskild lösning för alla h.

Linjära transformationer / avbildningar

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär transformation om
- $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- $T(cu) = cT(u) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

Linjära transformationer kan alltid beskrivas med en matris A så att

$$T(x) = Ax,$$

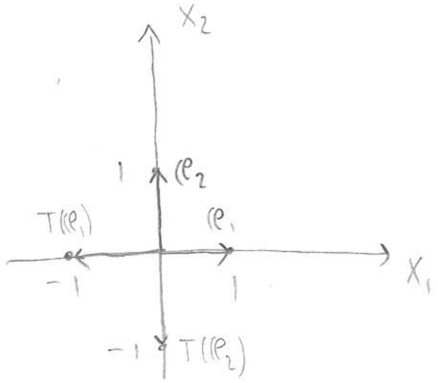
dvs vi tar en punkt/vektor i $\mathbb{R}^n$ och får den transformerade punkten/vektorn om vi multiplicerar med matrisen A.

$$\boxed{A = [T(e_1)\ \ T(e_2)\ \dots\ T(e_n)]}$$

1.9.11. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ reflekterar först punkten i x_1-axeln och sedan i x_2-axeln. Visa att T kan beskrivas som en rotation runt origo och ange rotationsvinkeln.

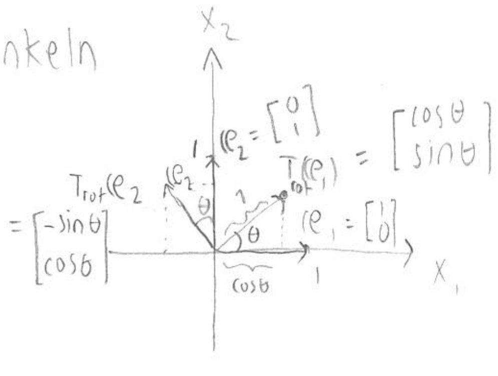
- Vilken är matrisen för T?

$$A = [T(e_1)\ \ T(e_2)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



- Vilken är matrisen för en rotation med vinkeln θ runt origo?

$$A_{rot}(\theta) = [T_{rot}\,e_1\ \ T_{rot}\,e_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Om vi jämför A och A_{rot} ser vi att

$A = A_{rot}(\pi)$, dvs T är en rotation runt origo med π radianer.