RÖ 3 INVERSA MATRISER 2.2.31, 2.3.13, 2.4.15, 2.5.26

Låt A vara en kvadratisk $(n \times n)$ matris

Inversen till A är en $n \times n$-matris A^{-1} sådan att

$$\boxed{A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I}$$

2×2-matriser: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

n×n-matriser: radreducera $[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$
om det går att få I på vänstersidan finns A^{-1} på högersidan. om det inte går finns ingen invers

2.2.31. Hitta inversen till $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ om den existerar.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} (3) \\ (-2) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] (3) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right] (1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

A^{-1}

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

2.3.13. När är en $n \times n$ uppåt triangulär matris inverterbar?

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & \times \end{bmatrix}$$ uppåt triangulär $n \times n$-matris.

Invertible matrix theorem s. 130 säger bl.a. att

A inverterbar $\Leftrightarrow$ A har n pivotpositioner

$\Rightarrow$ alla element på diagonalen måste vara nollskilda för att A ska vara inverterbar.
(eftersom det som mest kan finnas ett pivotelement per rad i A och det är n rader i A)

2.4.15. Antag att A_{11} är inverterbar. Hitta X och Y sådana att

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

där $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$

Multiplicera ihop och jämför element i blockmatriserna.

<u>hl</u>: $\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ XA_{11} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y + S \end{bmatrix}$

<u>vl</u>: $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

<u>OBS!</u> ordningen är viktig då man multiplicerar ihop matriser eftersom storlekarna måste överensstämma.

<u>vl = hl</u>: $\Rightarrow$
$$\begin{cases} A_{11}Y = A_{12} & (1) \\ XA_{11} = A_{21} & (2) \\ XA_{11}Y + S = A_{22} & (3) \\ S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & (4) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (1) \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{l} Y = A_{11}^{-1}A_{12} \\ X = A_{21}A_{11}^{-1} \end{array}} \\ (2) \Rightarrow & \end{array}$$

2.5.26. Antag att A kan delas upp i tre matriser P, D och P^{-1} så att

$A = PDP^{-1}$ där D är en diagonal matris, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

Hitta formler för A^2, A^3 och A^k.

- $A^2 = AA = (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{I}DP^{-1}) = PDIDP^{-1} = PD^2P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3^2 \end{bmatrix} P^{-1}$

- $A^3 = AAA = A^2A = (PD^2\underbrace{P^{-1})(P}_{I}DP^{-1}) = PD^3P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3^3 \end{bmatrix} P^{-1}$

- $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k} = \ldots = PD^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^k & 0 \\ 0 & 0 & 1/3^k \end{bmatrix} P^{-1}$

Detta är en praktisk uppdelning av A om man vill räkna ut höga potenser av A eftersom diagonala matriser är enkla att multiplicera (bara multiplicera ihop motsvarande element i matriserna).