RÖ4 VEKTORRUM OCH UNDERRUM 2.8.6, 4.1.17

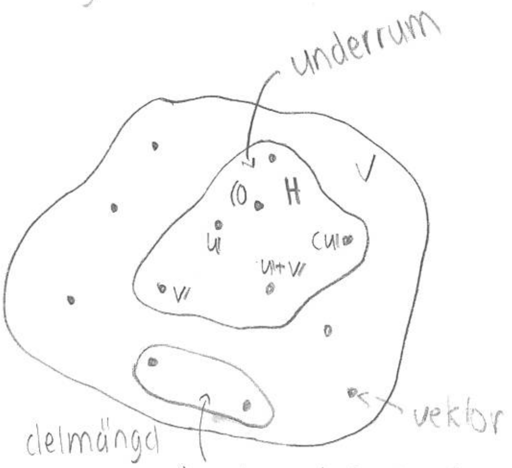
Ett **vektorrum** är en mängd av objekt (vektorer) som uppfyller vissa krav vid addition och multiplikation med en skalär (se s. 208)

Exempel: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$

Ett **underrum / delrum** H till ett vektorrum V är en delmängd av V sådan att

om $u, v \in H$ och c är en konstant gäller

1. $0 \in H$ (nollvektorn i V finns också i H)
2. $u + v \in H$
3. $cu \in H$



men inget underrum, 0 finns inte här eftersom det bara finns en 0 i V och den finns i H.

2.8.6. Låt $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $u = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Låt H vara underrummet till $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\{v_1, v_2, v_3\}$

Finns u i H?

$H = \{ v : v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3,\ c_1, c_2, c_3 \text{ konstanter} \}$

Finns konstanter c_1, c_2, c_3 s.a. $u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$? vi får försöka lösa ekv. systemet och se.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -4 \\ -2 & -7 & -8 & 10 \\ 4 & 9 & 6 & -7 \\ 3 & 7 & 5 & -5 \end{array}\right] \begin{matrix} 2 \quad -4 \quad -3 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & 9 \\ 0 & -5 & -10 & 7 \end{array}\right] \begin{matrix} 7 \quad 5 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{array}\right] \begin{matrix} \leftarrow \text{ingen lösn.} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$\Rightarrow u \notin H$. (u finns inte i H)

4.1.17. Låt $W = \left\{ \begin{bmatrix} 4a+3b \\ 0 \\ a+b+c \\ c-2a \end{bmatrix} : a, b, c \text{ konstanter} \right\}$

Hitta vektorer som spänner upp W eller visa att W inte är ett vektorrum.

Alla vektorer $\mathbf{v}$ i W kan skrivas på formen

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4a+3b \\ 0 \\ a+b+c \\ c-2a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{för några } a, b, c.$$

Detta är ett spann av vektorerna $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Alltså spänner de upp W.

Om det stått 1 ist. för 0 i rad 2 hade W inte varit något vektorrum

Då hade t.ex. $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ funnits i W, men

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad c\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{för } c \neq 1 \text{ inte funnits i } W$$

eftersom alla vektorer i W måste haft en etta i rad 2.

Inte heller $\mathbf{0}$) hade funnits i W eftersom det alltid är en etta i rad 2

KRYSSUPPGIFTER V2

1.3.26. Låt $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \end{array}$, $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $W = \text{spann}\{a_1, a_2, a_3\}$

a) Finns b i W?

Finns c_1, c_2, c_3 s.a. $c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = b$?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & 10 \\ -1 & 8 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \frac{2}{8} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \leftarrow c_3 \text{ fri}$$

$\Rightarrow$ ja, det finns oändligt många lösningar $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ till ekvationen $\Rightarrow$

b finns i W

b) Visa att a_3 finns i W.

Visa finns c_1, c_2 s.a. $c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = a_3$

Notera att $0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 = a_3$,

så a_3 finns i W $(c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1)$

2. Låt $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Spänner $\{v_1, v_2, v_3\}$ upp $\mathbb{R}^3$? Isf varför? Om inte, vad spänner de upp?

Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ som är linj. oberoende spänner $\mathbb{R}^3$, kolla om de är det.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} -5 \; 2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -11 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \left(\tfrac{1}{6}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -11/6 & 0 \\ 0 & 0 & 19/6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{enda lösn. är } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 linjärt oberoende $\Rightarrow$ de spänner $\mathbb{R}^3$

eftersom n linj. oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$.

b) samma som a) med $v_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 5 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} -5 \; 2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 24 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \left(\tfrac{1}{6}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

v_1, v_2, v_3 linjärt beroende $\Rightarrow$ spänner <u>ej</u> upp $\mathbb{R}^3$.

Två pivotelement $\Rightarrow$ två av vektorerna linjärt oberoende.

Två vektorer som är linj. oberoende spänner upp <u>ett plan</u> (i $\mathbb{R}^3$).

1.5.16. Beskriv lösn. till $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$ på parameterform och gör en geometrisk jämförelse med motsvarande homogena ekv. system (med hl. noll).

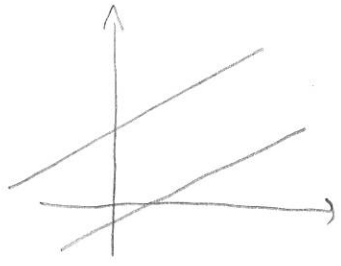
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{array}\right] \begin{matrix} -1 \;\; 3 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 6 \end{array}\right] -2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -3 \sim \quad \leftarrow x_3 \text{ fri}$$

pivot => fixa nollor ovanför

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 - 5 \\ x_2 = 3x_3 + 3 \\ x_3 = \text{fri} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta är en linje i $\mathbb{R}^3$ med lutningen $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ som går genom punkten $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Motsvarande homogena ekv. system är en linje i $\mathbb{R}^3$ med samma lutning men som går genom origo. (lösn. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

jfr



samma lutning men går genom olika punkter

1.7.14. För vilka h är $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$ linjärt beroende?

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; v_1 \quad\;\; v_2 \quad\quad\quad\; v_3$

För vilka h finns en lösning till $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$ som inte är nollvektorn?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & h & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \;\; -3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 23 & h-3 & 0 \end{array}\right] -\frac{23}{2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h-26 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ vi måste ha $h-26=0$, dvs $h=26$, för att få en nollskild lösning (c_3 fri).

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 linjärt beroende för $h=26$.