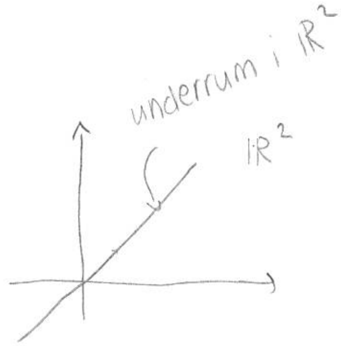
RÖ 5. BASER, NOLLRUM, KOLONNRUM 2.8.17, 2.9.5, 4.3.13, 4.5.8

$\boxed{\text{VEKTORRUM}}$: mängd objekt (vektorer) som uppfyller vissa regler vid addition och multiplikation med skalär (se s. 208)

Typexempel: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{UNDERRUM}}$: delmängd H av ett vektorrum V som uppfyller

1. $\mathbb{0} \in H$
2. $\mathbb{u}, \mathbb{v} \in H \Rightarrow \mathbb{u}+\mathbb{v} \in H$
3. $\mathbb{u} \in H$, c konstant $\Rightarrow c\mathbb{u} \in H$



Typexempel: linje eller plan genom origo, Nul A, Col A, där A en matris

$\boxed{\text{NUL A och COL A}}$

Låt A vara en $m \times n$-matris, $A = [\mathbb{a}_1, \dots \mathbb{a}_n]$

Nul A: alla lösningar $\mathbb{x}$ till $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$.

Col A: spann$\{\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n\}$, dvs alla vektorer vi kan få som linjärkombinationer av kolumnerna i A / vektorrummet som spänns upp av kolumnerna i A.

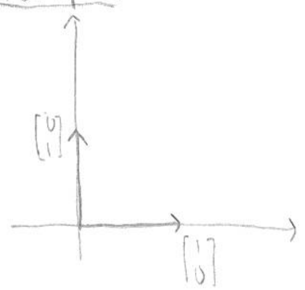
$\boxed{\text{BASER}}$

En bas B i ett vektorrum V är en mängd vektorer $\{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n\}$ som uppfyller

1. $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n \in V$
2. $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ linjärt oberoende
3. $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ spänner upp V

Typexempel:

$\mathbb{R}^2$:

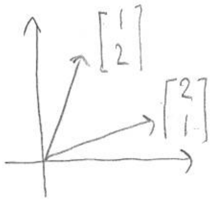


$B = \{ \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{\mathbb{e}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{\mathbb{e}_2} \}$

$\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2$ är linj. oberoende och spänner upp $\mathbb{R}^2$ eftersom

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \text{för}$$

$$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$



Men vilka som helst 2 vektorer i $\mathbb{R}^2$ som är linj. oberoende är en bas för $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \iff \left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & x\\2 & 1 & y\end{array}\right] \sim$$

Vi vet att detta har en lösning eftersom $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ är linjärt oberoende
($\Rightarrow$ 2 pivotelement $\Rightarrow$ radekvivalent med I)

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\\0 & 1 & \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\\\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$B_2 = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}$ är en bas för $\mathbb{R}^2$.

$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$ kallas koordinatvektorn för $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ i basen B_2. Skrivs $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$

Beskriver hur långt vi ska gå längs varje basvektor för att komma till $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

Allmänt för $\mathbb{R}^n$: En bas för $\mathbb{R}^n$ har

1. ligger i $\mathbb{R}^n$
2. är linjärt oberoende
3. n st. vektorer

2.8.17. Är $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbb{R}^3$?

Är det $\underset{①}{\underline{\text{tre}}}$ $\underset{②}{\underline{\text{linjärt oberoende}}}$ vektorer som alla $\underset{③}{\underline{\text{ligger i } \mathbb{R}^3}}$? Isf är det en bas.

① ja.

③ ja

② $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & -7 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -10 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 23 \end{bmatrix}$

3 pivotpositioner $\Rightarrow$ 3 linjärt oberoende kolumner $\Rightarrow$ ja.

Alltså är det en bas för $\mathbb{R}^3$.

2.9.5. $\mathcal{B} = \left\{ \overset{\mathbf{b}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{b}_2}{\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}} \right\}$ är en bas för ett underrum i $\mathbb{R}^3$.

Hitta koordinaterna för $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ -7 \end{bmatrix}$ i basen $\mathcal{B}$.

De <u>två</u> koordinaterna c_1 och c_2 ges av

$c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 = \mathbf{x}$, dvs vi vill lösa

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & 10 \\ -3 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & -4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -5/4 \end{bmatrix}$ $\quad \left(\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_E \text{ där } E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right)$

Beskriver hur långt vi ska gå längs varje basvektor för att komma till $\mathbf{x}$

4.3.13 $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Hitta baser för Col(A) och Nul(A).

<u>Col A</u>: $\text{Col}(A) = \text{spann}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} =$ {pivotpositioner i kol 1 och 2 => kol 3 och 4 ligger i spannet av kol 1 och 2}

$= \text{Spann}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för Col(A).

Varför?

1. De ligger i Col A (eftersom de definierar spannet som är Col A)
2. De är linjärt oberoende (det har vi fixat genom att ta pivotkolumnerna i A)
3. De spänner upp Col A (eftersom de definierar spannet som är Col A)

$\boxed{\text{I allmänhet: pivotkolumnerna i A är en bas för Col A}}$

<u>Nul A</u>: $\text{Nul } A = \{ x : Ax = 0 \}$, vilka x löser $Ax = 0$?

$$[A \mid 0] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_1 bas, x_2 bas, x_3 fri, x_4 fri

$\Rightarrow \text{Nul}(A) = \text{Spann}\left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow B = \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för Nul(A).

Varför?

1. De ligger i Nul A (eftersom de definierar spannet som är Nul A)
2. De är linjärt oberoende (vektorerna i en parameterform blir automatiskt det)
3. De spänner upp Nul A (eftersom de definierar spannet som är Nul A)

<u>I allmänhet</u>: skriv lösningen till $Ax = 0$ på parameterform. Vektorerna i parameterformen bildar en bas för Nul A

4.5.8. Låt W vara underrummet $\{(a,b,c,d) : a-3b+c=0\}$

a) Hitta en bas för W.

b) Vilken dimension har W?

a) Varje vektor i W kan skrivas på parameterform ($a = 3b - c \Rightarrow$ b, c och d fria)

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Så $W = \text{spann}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\Rightarrow$ (linjärt oberoende eftersom vi fått dem från en parameterform)

$\Rightarrow$ en bas för W är $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\text{Dim}(W) = 3$

Dimensionen hos ett vektorrum = antal vektorer i basen.