RÖ 6 KRYSSUPPGIFTER

1. Lat $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$. Beräkna $\overset{1}{uv^T}$ och $\overset{2}{vu^T}$ samt $\overset{3}{u^Tv}$ och $\overset{4}{v^Tu}$.
Vad ger u^Tv och v^Tu?

1 $uv^T = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot2 & 3\cdot5 & 3\cdot0 \\ -1\cdot2 & -1\cdot5 & -1\cdot0 \\ 4\cdot2 & 4\cdot5 & 4\cdot0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 8 & 20 & 0 \end{bmatrix}$

2 $vu^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot3 & 2\cdot-1 & 2\cdot4 \\ 5\cdot3 & 5\cdot-1 & 5\cdot4 \\ 0\cdot3 & 0\cdot-1 & 0\cdot4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 15 & -5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (uv^T)^T$

eftersom $(uv^T)^T = (v^T)^T u^T = vu^T$

3 $u^Tv = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\cdot2 + (-1)\cdot5 + 4\cdot0 = 1$

4 $v^Tu = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\cdot3 + 5\cdot(-1) + 0\cdot4 = 1 = (u^Tv)^T$

samma eftersom transponatet av ett tal är talet själv.

2. En matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är nilpotent om det finns ett heltal $k \geq 1$ så att $A^k = 0$, men $A^j \neq 0$ för $j = 0, \ldots, k-1$.

Visa att $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ är nilpotenta

genom att bestämma ett sådant k för vardera matris

A: $AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow k = 3$

B: $BB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow k = 3$

Ser man A och B som matriserna för en linjär transformation T betyder detta att vilken punkt $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^3$ vi än transformerar kommer den efter tre transformationer hamna i origo och fastna där

$T(T(T\mathbb{x})) = A(A(A\mathbb{x})) = A^3\mathbb{x} = \mathbb{0}$ och samma för B.

3. Hitta inversen till $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Hur ser inversen till en godtycklig triangulär matris ut?

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{5}{2} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2 \\ -6 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1/2 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Vi ser att

- diagonalelementen $A^{-1}_{ii} = 1/A_{ii}$ för $i = 1, 2, 3$
- nedre diagonalen $A^{-1}_{ij} = 0$, $i > j$.

allmän 3×3-matris som är uppåt triangulär

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1/a_{11} \\ 1/a_{22} \\ 1/a_{33} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}/a_{22} & 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{33} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{a_{23}}{a_{22}} \quad -\frac{a_{13}}{a_{11}} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a_{12}/a_{11} & 0 & 1/a_{11} & 0 & -a_{13}/a_{11}a_{33} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{22} & -a_{23}/a_{22}a_{33} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{33} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -a_{12}/a_{11} \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/a_{11} & -a_{12}/a_{11}a_{22} & X \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{22} & -a_{23}/a_{22}a_{33} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{33} \end{array}\right]$$

$$X = \frac{1}{a_{11}a_{33}} \left(\frac{a_{23}}{a_{22}} - a_{13} \right)$$

4. LU-faktorisera $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & -11 \\ 10 & 1 & 11 \end{bmatrix}$ och använd L och U för att lösa $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$, där $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \boxed{-6} & -4 & -11 \\ \boxed{10} & 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \; -5 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -4 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = U$$

$/2 \qquad\qquad /-1$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b} \iff LU\mathbb{x} = \mathbb{b} \iff \begin{cases} U\mathbb{x} = \mathbb{y} \\ L\mathbb{y} = \mathbb{b} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ lös först $\overset{1}{L\mathbb{y} = \mathbb{b}}$ för $\mathbb{y}$ och sedan $\overset{2}{U\mathbb{x} = \mathbb{y}}$ för $\mathbb{x}$.

1: $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{matrix} 3 \; -5 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 12 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -4 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \mathbb{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

2: $$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -\tfrac{1}{4} \; \cdot 2 \; \cdot 3 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$