RÖ7: DETERMINANTER, EGENVEKTORER OCH EGENVÄRDEN

Determinant: Ett tal som hör till en $n \times n$-matris

← Säger om matrisen är inverterbar ($\det \neq 0$) eller ej ($\det = 0$).

Egenvektorer och egenvärden:

Låt A vara en $n \times n$-matris

De vektorer $\mathbf{x} \neq 0$) och tal λ som uppfyller

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

kallas egenvektorer och egenvärden till A

Varje $n \times n$-matris har n st. egenvärden (några kan vara samma)

Egenrum (till A och λ): alla egenvektorer till A som hör till egenvärdet λ tillsammans med nollvektorn bildar ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

En bas för egenrummet ges av de linjärt oberoende egenvektorerna till A och λ (k st. om λ har multiplicitet k)

3.2.29. Beräkna $\det B^4$, där $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + 0\cdot2\cdot1 + 1\cdot1\cdot2 - 1\cdot1\cdot1 - 0\cdot1\cdot1 - 1\cdot2\cdot2$$

$$= 1 + 2 - 1 - 4 = -2$$

$\boxed{\det AB = \det A \cdot \det B}$ $\Rightarrow \det B^4 = (\det B)^4 = 16$

5.1.15. Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$. $\lambda = 3$ är ett egenvärde till A. Hitta en bas för egenrummet till $\lambda = 3$.

Egenrummet spänns upp av egenvektorerna till $\lambda = 3$.
De uppfyller

$$A\mathbb{x} = 3\mathbb{x} = 3I\mathbb{x} \iff (A-3I)\mathbb{x} = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow$ vi löser $[A-3I \mid \mathbb{0}]$ så får vi egenvektorerna.

$$A-3I = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[A-3I \mid \mathbb{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} ① \; ② \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_2, x_3 fria

$$\Rightarrow \mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{bas för egenrummet}}$$

Detta är egenrummet

Alla egenvektorer till $\lambda = 3$ kan skrivas på denna formen,

$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för egenrummet till $\lambda = 3$.

Att vi fick ett plan (2 basvektorer) betyder att det finns två egenvärden $\lambda = 3$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \; \lambda_3 = ?)$

5.2.13* Hitta det karaktäristiska polynomet för $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$.

Det kar. polynomet ger oss egenvärdena till A och ges av

$$\boxed{\det(A-\lambda I) = 0}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 0 \\ 5 & 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(9-\lambda)(3-\lambda) + (-2)\cdot 0\cdot 5 + 0\cdot(-2)\cdot 8$$
$$- 0\cdot(9-\lambda)\cdot 5 - (-2)\cdot(-2)\cdot(3-\lambda)$$
$$- (6-\lambda)\cdot 0\cdot 8$$

$$= (6-\lambda)(27-12\lambda+\lambda^2) - 12 + 4\lambda$$

$$= 162 - 72\lambda + 6\lambda^2 - 27\lambda + 12\lambda^2 - \lambda^3 - 12 + 4\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 95\lambda + 150$$

Varför blir detta egenvärdena till A?

Egenvärden uppfyller

$$A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x} \iff (A-\lambda I)\mathbb{x} = \mathbb{0},$$

där $\mathbb{x} \neq \mathbb{0}$.

Vi vill alltså lösa $[A-\lambda I \mid \mathbb{0}]$

Detta har en lösning $\mathbb{x} \neq \mathbb{0}$ bara om kolumnerna i $A-\lambda I$ är linjärt beroende. $\iff \det(A-\lambda I) = 0$

Bara för dessa λ finns egenvektorer (lösningar som ej är $\mathbb{0}$)