KRYSSUPPGIFTER LV4

1. Om en 4x7-matris har 3 pivotkolonner, är $\mathrm{Col}\,A = \mathbb{R}^3$?
   Kan vi alltid lösa $Ax = b$?
   Vad är dimensionen av $\mathrm{Nul}\,A$?

- $$A = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x \end{bmatrix} = [a_1 \; a_2 \; \dots \; a_7]$$

a_1, a_3, a_4 pivotkolonner

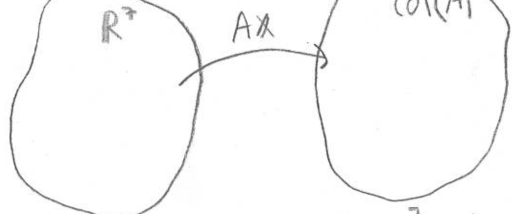
$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{spann}\{a_1, \dots, a_7\} \subseteq \mathbb{R}^4$ eftersom A har fyra rader

$\Rightarrow \mathrm{Col}(A) \neq \mathbb{R}^3$ ($\mathrm{Col}\,A$ och $\mathbb{R}^3$ är i helt olika dimensioner)

[Däremot är $\mathrm{Col}\,A = \mathrm{spann}\{a_1, \dots, a_7\} = \mathrm{spann}\{a_1, a_3, a_4\}$ där a_1, a_3, a_4 är linjärt oberoende $\Rightarrow \dim(\mathrm{Col}\,A) = 3$ (ett 3-dimensionellt rum i $\mathbb{R}^4$)]

- Vi kan lösa $Ax = b$ om b ligger i $\mathrm{Col}\,A$ ($\mathrm{Col}\,A = \{b : Ax = b \text{ för } x \in \mathbb{R}^7\}$)
  Nu är $b \in \mathbb{R}^4$, men $\dim(\mathrm{Col}\,A) = 3$.
  Därför kan vi bara lösa $Ax = b$ för de b som ligger i det 3-dimensionella delrum i $\mathbb{R}^4$ som $\mathrm{Col}\,A$ spänner upp.

  $\Rightarrow$ nej!



Tar vi alla x i $\mathbb{R}^7$ och gör Ax på dem får vi $\mathrm{Col}\,A$. Om det finns något x som löser $Ax = b$ måste alltså b finnas i $\mathrm{Col}\,A$.

- Eftersom A har 3 pivotkolonner gäller

$$[A \mid 0] \sim \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & x & 0 & 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_2, x_5, x_6, x_7 fria

Så vi har 4 fria variabler

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbb{b}_2} + x_5 \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbb{b}_5} + x_6 \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbb{b}_6} + x_7 \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbb{b}_7}$$

löser $AX=0$
för alla värden på
de fria variablerna

$\Rightarrow$ Nul A = spann $\{\mathbb{b}_2, \mathbb{b}_5, \mathbb{b}_6, \mathbb{b}_7\}$

där $\mathbb{b}_2, \mathbb{b}_5, \mathbb{b}_6, \mathbb{b}_7$ är linjärt oberoende (pga parameterform)

$\Rightarrow \{\mathbb{b}_2, \mathbb{b}_5, \mathbb{b}_6, \mathbb{b}_7\}$ en bas för Nul A

$\Rightarrow$ $\underline{\dim(\text{Nul } A) = 4}$

Alt. $\dim(\text{Nul } A) + \dim(\text{Col } A)$ = antal kolumner i A

$\Rightarrow \dim(\text{Nul } A) = 7 - 3 = 4$

2. Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$

Visa att $\text{rank } AB \leq \max(\text{rank } A, \text{rank } B)$ via två steg

(a) Visa att $\text{rank } AB \leq \text{rank } A$

(b) visa att $\text{rank } AB \leq \text{rank } B$

(a) Alt 1. Idé: visa att $\text{Col } AB \subset \text{Col } A$.

Då måste $\text{Col } AB$ ha lägre dimension än $\text{Col } A$, dvs $\text{rank } AB \leq \text{rank } A$.
Ett plan (dim 2) kan ju t.ex inte vara delmängd av en linje (dim 1).

Om $v \in \text{Col } AB \Rightarrow v \in \text{Col } A$ är $\text{Col } AB \subset \text{Col } A$ (allt som finns i Col AB finns också i Col A)

$v \in \text{Col } AB \Rightarrow \exists\, x : ABx = v$

$\Leftrightarrow \{y = Bx\}$

$\Leftrightarrow \exists\, y : Ay = v$

$\Rightarrow v \in \text{Col } A$,

dvs $\text{Col } AB \subset \text{Col } A \Rightarrow \text{rank } AB \leq \text{rank } A$

2. forts.

Alt 2: $AB = A[\mathbb{b}_1 \ldots \mathbb{b}_r] = [A\mathbb{b}_1 \ldots A\mathbb{b}_r]$ där

$A\mathbb{b}_1, \ldots, A\mathbb{b}_r \in \text{Col } A$ (eftersom $\text{Col } A = \{A\mathbb{x} : \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n\}$)

Vi undrar hur många linjärt oberoende kolonner AB har, eftersom det är rank AB.

Eftersom det inte kan finnas fler än rank A linjärt oberoende vektorer i Col A och $A\mathbb{b}_i \in \text{Col } A$, $i = 1, \ldots, r$ kan som mest rank A st. av dessa r st. kolonner i AB vara linj. oberoende.

$$\Rightarrow \underline{\text{rank } AB \leq \text{rank } A}$$

(b) Vi vet att rank C = rank C^T för alla matriser C.

Så

$$\text{rank } B = \text{rank } B^T$$

och om vi använder (a) på $(AB)^T = B^T A^T$ får vi

$$\text{rank } B^T A^T \leq \text{rank } B^T \Leftrightarrow \text{rank } (AB)^T \leq \text{rank } B^T$$

$$\Leftrightarrow \underline{\text{rank } AB \leq \text{rank } B}$$

Alt 2: samma tänk som i a) fast för nollrummen ger

$$x \in \text{Nul } B \iff Bx = 0$$

$$\Rightarrow A\underbrace{Bx}_{=0} = 0 \iff x \in \text{Nul } AB$$

dvs $x \in \text{Nul } B \Rightarrow x \in \text{Nul } AB$,

dvs $\text{Nul } B \subset \text{Nul } AB$

$\Rightarrow \dim \text{Nul } B \leq \dim \text{Nul } AB$.

Men det gäller ju att $r = \dim \text{Nul } B + \text{rank } B$

$r = \dim \text{Nul } AB + \text{rank } AB$

Lös ut $\dim \text{Nul } B = r - \text{rank } B$ och $\dim \text{Nul } AB = r - \text{rank } AB$

och byt ut mot detta i olikheten

$\Rightarrow$ $r - \text{rank } B \leq r - \text{rank } AB$ eller

$\underline{\text{rank } AB \leq \text{rank } B}$

3. Låt planet U i $\mathbb{R}^3$ ges av ekvationen $x+2y+3z=0$.
Då är U ett underrum av $\mathbb{R}^3$. Vad är dess dimension? Ange en bas för U.

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x+2y+3z=0 \right\} \quad \text{eller} \quad \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{matrix} x = -2y-3z \\ y \text{ fri} \\ z \text{ fri} \end{matrix} \right\}$$

Varje $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ i U kan skrivas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs $U = \text{Spann} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ är linjärt oberoende eftersom de kommer från en parameterform

$$\Rightarrow \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ är en bas för } U$$

Eftersom basen B innehåller två vektorer är $\dim(U) = 2$.

4. Låt $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ och $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ vara två baser för $\mathbb{R}^2$.

Bestäm basbytesmatriserna $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$ och $\underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}{P}$.

Radreducera $[\mathbb{c}_1 \ \mathbb{c}_2 \mid \mathbb{b}_1 \ \mathbb{b}_2]$ till $[I \mid P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}]$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right] \overset{2}{} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & 2 \end{array}\right] \tfrac{1}{7} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2/7 \end{array}\right] -2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -11/7 \\ 0 & 1 & 1 & 2/7 \end{array}\right] \Rightarrow P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -11/7 \\ 1 & 2/7 \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = (P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{7} \cdot 0 - 1 \cdot (-\frac{11}{7})} \begin{bmatrix} 2/7 & 11/7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{7}{11} \begin{bmatrix} 2/7 & 11/7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/11 & 1 \\ -7/11 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta fungerar eftersom vi vill hitta $[[\mathbb{b}_1]_\mathcal{C} \ [\mathbb{b}_2]_\mathcal{C}]$ och eftersom $\mathcal{C}$ är en bas gäller

$$[\mathbb{c}_1 \ \mathbb{c}_2][\mathbb{b}_1]_\mathcal{C} = \mathbb{b}_1 \quad \text{och} \quad [\mathbb{c}_1 \ \mathbb{c}_2][\mathbb{b}_2]_\mathcal{C} = \mathbb{b}_2$$

Sätter vi ihop detta får vi

$$[\mathbb{c}_1 \ \mathbb{c}_2][[\mathbb{b}_1]_\mathcal{C} \ [\mathbb{b}_2]_\mathcal{C}] = [\mathbb{b}_1 \ \mathbb{b}_2]$$

Så vi får $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [[\mathbb{b}_1]_\mathcal{C} \ [\mathbb{b}_2]_\mathcal{C}]$ om vi löser

$$[\mathbb{c}_1 \ \mathbb{c}_2 \mid \mathbb{b}_1 \ \mathbb{b}_2].$$