RÖ9. DIAGONALISERING, ORTOGONALITET, PROJEKTION

Låt A vara en $n \times n$-matris.

Om $A = PDP^{-1}$ där P är inverterbar och D diagonal är A diagonaliserbar.

Isf är

$$P = [\mathbb{v}_1 \; \mathbb{v}_2 \; \ldots \; \mathbb{v}_n],$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

där $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ är n linjärt oberoende egenvektorer till A och $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ är motsvarande egenvärden

A är diagonaliserbar om A har n linj. oberoende egenvektorer.

Exempel:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -2$

Diagonaliserbar? Ja, eftersom egenvektorer till egenvärden som är olika är linjärt oberoende $\Rightarrow$ vi kan hitta $n = 2$ st. linjärt oberoende egenvektorer.

T.ex.

$$\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

OBS! ordningen på egenvärden och egenvektorerna är viktig. Byter man plats på två egenvärden måste man byta plats på motsvarande egenvektorer och vice versa.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Diagonaliserbar? Vi vet inte förrän vi kollat dimensionen på egenrummet till $\lambda = 2$

$$(A-2I)\,\mathbb{x} = \mathbb{0} \iff \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_1 fri $\uparrow$ $\quad$ x_2 fri $\uparrow$

bas för egenrummet

En bas för egenrummet innehåller 2 vektorer (vi har 2 fria variabler)

$\Rightarrow$ dim (egenrummet $\lambda = 2$) $= 2 =$ multipliciteten hos $\lambda = 2$

$\Rightarrow$ A är diagonaliserbar

$$\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Diagonaliserbar? Kolla dimensionen hos egenrummet.

$$(A-1I)\,\mathbb{x} = \mathbb{0} \iff \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_2 fri $\uparrow$

bas för egenrummet.

dim (egenrummet $\lambda = 1$) $= 1$, men $\lambda = 1$ har multiplicitet 2

$\Rightarrow$ finns bara en linjärt oberoende egenvektor till A

$\Rightarrow$ A ej diagonaliserbar

TRE SAKER KAN HÄNDA

1. Alla egenvärden olika $\Rightarrow$ A diagonaliserbar
2. Det finns lika egenvärden och multipliciteten stämmer med dimensionen av egenrummet $\Rightarrow$ A diagonaliserbar
3. Det finns lika egenvärden och multipliciteten hos något av dessa stämmer ej med dimensionen av egenrummet $\Rightarrow$ A ej diagonaliserbar

5.4.15. Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uppfylla $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

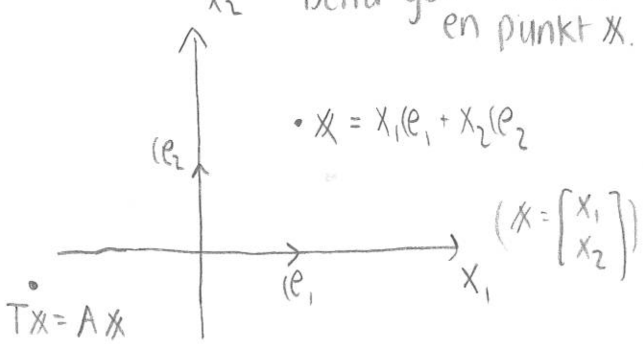
Hitta en bas B för $\mathbb{R}^2$ sådan att i den basen är matrisen för T diagonal.

Detta är uppfyllt om $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ där $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ är egenvektorer till A.

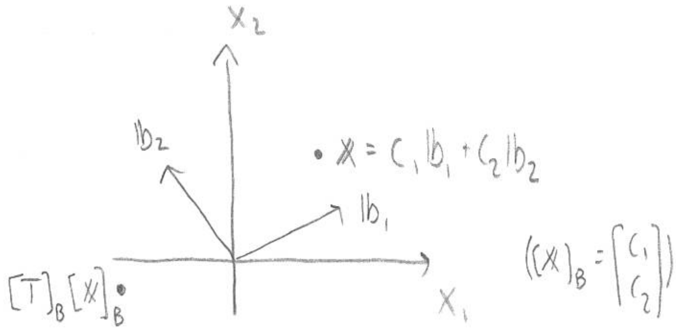
Då är $[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$,

där $[T]_B$ är matrisen för T om vi använder basen B.

Detta gör T med en punkt $\mathbf{x}$.



Diagonalisera A, dvs hitta P och D, så har vi B och $[T]_B$.



Behöver en annan matris $[T]_B$ för att komma till rätt punkt om vi jobbar med B-basen.

Om $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ är två egenvektorer till A blir $[T]_B$ diagonal.

<u>Egenvärden</u>:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 5.$$

<u>Egenvektorer</u>:

$(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1}$$

x_2 fri

$(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2}$$

x_2 fri

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

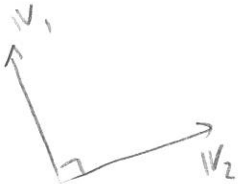
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \mathbb{b}_1 & \mathbb{b}_2 \end{array}$$

$\Rightarrow B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ gör att $[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ är diagonal!

Ortogonalitet

$\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ är ortogonala (vinkelräta) om $\mathbb{V}_1 \cdot \mathbb{V}_2 = 0$ $\quad (\mathbb{V}_1 \cdot \mathbb{V}_2 = \|\mathbb{V}_1\| \|\mathbb{V}_2\| \cdot \cos\theta = 0)$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$



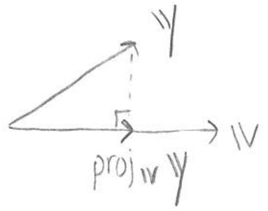
Projektion

På en linje:

$$\text{Proj}_{\mathbb{V}} \mathbb{Y} = \left(\frac{\mathbb{Y} \cdot \mathbb{V}}{\mathbb{V} \cdot \mathbb{V}}\right) \mathbb{V}$$

ett tal

riktning av $\mathbb{V}_1$



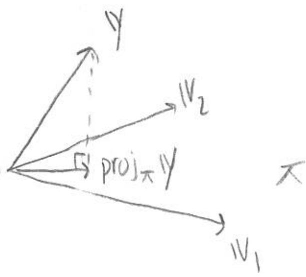
Komponenten av $\mathbb{Y}$ i $\mathbb{V}$:s riktning!

På ett plan π:

$$\text{Proj}_{\pi} \mathbb{Y} = \left(\frac{\mathbb{Y} \cdot \mathbb{V}_1}{\mathbb{V}_1 \cdot \mathbb{V}_1}\right) \mathbb{V}_1 + \left(\frac{\mathbb{Y} \cdot \mathbb{V}_2}{\mathbb{V}_2 \cdot \mathbb{V}_2}\right) \mathbb{V}_2$$

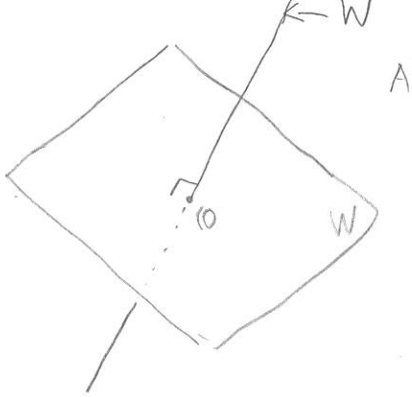
om $\pi = \text{spann}\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2\}$

där $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ ortogonal bas för π.



Ortogonalkomplement, $W^{\perp}$

om W är ett delrum i $\mathbb{R}^n$ är $W^{\perp}$ alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot W.



Alla vektorer på linjen bildar rät vinkel mot alla vektorer i planet W.

6.2.26. W är ett underrum i $\mathbb{R}^n$ som spänns upp av n st. ortogonala vektorer. Förklara varför $W = \mathbb{R}^n$.

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ortogonala $\Rightarrow$ $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linjärt oberoende.

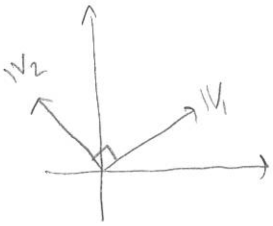
Dvs W spänns upp av n st. linjärt oberoende vektorer $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ $\Rightarrow$

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ är en bas för W $\Rightarrow$ $\dim W = n$

Eftersom $W \subset \mathbb{R}^n$ och W har dimension n måste W vara $\mathbb{R}^n$!

$\boxed{\text{ORTOGONALITET} \Rightarrow \text{LINJÄRT OBEROENDE}}$ (men ej tvärt om)

$\underline{\mathbb{R}^2}$



$W = \text{spann}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \mathbb{R}^2$ eftersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ortogonala och därför linjärt oberoende.

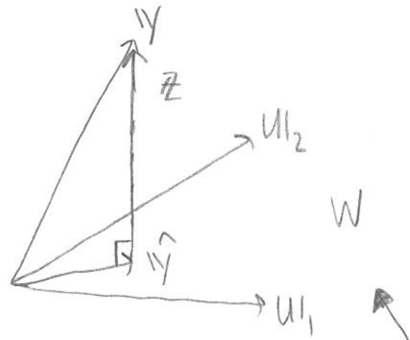
6.3.8. Låt $W = \text{spann}\left\{ \underset{\mathbf{u}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{\mathbf{u}_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}} \right\}$ och $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Hitta $\hat{\mathbf{y}}$ och $\mathbf{z}$ så att $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$, där $\hat{\mathbf{y}} \in W$ och $\mathbf{z} \in W^{\perp}$.

W är ett plan, och

$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = 0$ $\Rightarrow$

$\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ ortogonala!



Därför är $\hat{\mathbf{y}} = \left(\dfrac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 + \left(\dfrac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\right)\mathbf{u}_2$

$$= \frac{(-1,4,3)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(-1,4,3)\cdot(-1,3,-2)}{(-1,3,-2)\cdot(-1,3,-2)} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\hat{\mathbf{y}} = \text{proj}_W \mathbf{y}$

$\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} = \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$

$$= \frac{6}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{7}{14}\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\7/2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{z} = \mathbb{y} - \hat{\mathbb{y}} = \begin{bmatrix}-1\\4\\3\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\5/2\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\5\\8\end{bmatrix}$$

Blev $\hat{\mathbb{y}} \cdot \mathbb{z} = 0$ som det skulle?

$(-1,3,-2)\cdot(-1,5,8) = 1 + 15 - 16 = 0$ ok!

och $\mathbb{y} = \hat{\mathbb{y}} + \mathbb{z}$ eftersom vi konstruerade $\mathbb{z}$ så.