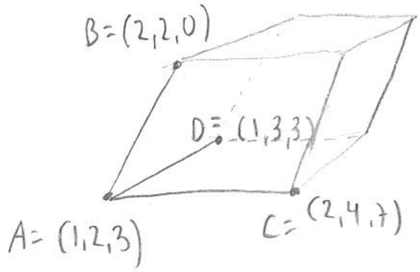
RÖ10 KRYSSUPPGIFTER

1. Beräkna volymen av den parallellpiped som har de fyra närliggande hörnen $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\7\end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}$.



$$\vec{AC} = \begin{bmatrix}2\\4\\7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\-3\end{bmatrix}$$

$$\vec{AD} = \begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$V = \left|\det\left(\left[\vec{AB}\ \ \vec{AC}\ \ \vec{AD}\right]\right)\right| = \left|\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\\-3 & 4 & 0\end{vmatrix}\right| = |1\cdot2\cdot0 + 1\cdot1\cdot(-3) + 0\cdot0\cdot4$$

$$-0\cdot2\cdot(-3) - 1\cdot0\cdot0 - 1\cdot1\cdot4| = |-3-4| = 7 \text{ v.e.}$$

Metod

1. Välj ett av hörnen som origo, vi valde $A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ men någon av de andra hade också gått bra
2. Bilda vektorerna från A till övriga hörn, $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$.
3. Volymen är absolutbeloppet av determinanten av matrisen med vektorerna $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$.

2. om talen $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ är givna så kan man visa att $n \times n$-matrisen

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

uppfyller $\det(tI_n - C) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0$

Visa detta för $n=4$, (eller för alla n.)

<u>$n=4$</u>: $\det(tI_4 - C_4) = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 & c_0 \\ -1 & t & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & t & c_2 \\ 0 & 0 & -1 & t+c_3 \end{vmatrix}$ = {kofaktor längs kolumn 1}

$$= t \begin{vmatrix} t & 0 & c_1 \\ -1 & t & c_2 \\ 0 & -1 & t+c_3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_0 \\ -1 & t & c_2 \\ 0 & -1 & t+c_3 \end{vmatrix} = t\left(t^3 + c_3 t^2 + c_1 + t c_2\right) + c_0$$

$$= t^4 + c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0$$ ok!

<u>allmänt n</u>: $\det(tI_n - C_n) = \begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & t & 0 \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & t \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & -1 & t+c_{n-1} \end{vmatrix}$ $\frac{1}{t}$

= { vi använder att determinanten inte ändras då man lägger till en multipel av en rad till en annan. Genom att göra det upprepade gånger kan vi få fram en triangulär matris vars determinant är produkten av diagonalelementen. }

$$= \begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_0 \\ 0 & t & 0 & \cdots & 0 & c_1 + c_0/t \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & t + c_{n-1} \end{vmatrix} \overset{(1/t)}{=} \begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_0 \\ 0 & t & 0 & \cdots & 0 & c_1 + c_0/t \\ 0 & 0 & t & \cdots & 0 & c_2 + c_1/t + c_0/t^2 \\ 0 & 0 & -1 & t & 0 & c_3 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & t + c_{n-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-2 \text{ rader} \end{matrix} = \cdots =$$

$$= \begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ 0 & t & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & t & c_{n-2} + \frac{1}{t} c_{n-3} + \frac{1}{t^2} c_{n-4} + \cdots + \frac{1}{t^{n-3}} c_1 + \frac{1}{t^{n-2}} c_0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t + c_{n-1} \end{vmatrix} (1/t)$$

$$= \begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & & \\ 0 & t & \cdots & & \\ \vdots & 0 & t & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t + c_{n-1} + \frac{c_{n-2}}{t} + \frac{c_{n-3}}{t^2} + \cdots + \frac{c_1}{t^{n-2}} + \frac{c_0}{t^{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \{\text{diagonal matris}\} = \underbrace{t \cdot t \cdots t}_{n-1} \left(t + c_{n-1} + \frac{c_{n-2}}{t} + \cdots + \frac{c_1}{t^{n-2}} + \frac{c_0}{t^{n-1}} \right)$$

$$= t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0 \quad \text{ok!}$$

Alt 2: induktion

1. visa gäller för $n = 2$.

$$\det(tI_2 - C_2) = \begin{vmatrix} t & c_0 \\ -1 & t + c_1 \end{vmatrix} = t(t + c_1) + c_0 = t^2 + c_1 t + c_0 \quad \text{ok!}$$

2. Antag gäller för $n=k$ och visa mha det att det gäller för $n=k+1$.

$$\det(tI_{k+1}-C_{k+1}) = \begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & t & 0 \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & t \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & -1 & t+c_k \end{vmatrix} = \{\text{kofaktor längs rad } 1\}$$

$$= t\underbrace{\begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ -1 & t & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+c_k \end{vmatrix}}_{\substack{\text{k×k-matris på}\\ \text{formen } C_k\text{, bara}\\ \text{att konstanterna}\\ \text{har andra namn}}} + (-1)^k c_0 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & & -1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{diagonal matris!}\\ \text{det = produkt av}\\ \text{diagonalelem.}}} = \{\text{anv. induktionsantagandet}\}$$

$$= t(t^k + c_k t^{k-1} + \ldots + c_2 t + c_1) + \overbrace{(-1)^k \cdot c_0 \cdot (-1)^k}^{(-1)^{2k}\cdot c_0 \ \leftarrow \text{ jämnt tal}}$$

$$= t^{k+1} + c_k t^k + \ldots + c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \qquad \text{VSV.}$$

3. Då gäller det för alla n! (säger induktionsaxiomet)

3. En matris A och dess diagonalisering ges av

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} = \frac{1}{4}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & d \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{P^{-1}}$$

Pga en korrupt hårddisk saknas data för a, b, c, d.

Återskapa dessa värden utifrån det du vet om egenvärden och egenvektorer.

Om $A = PDP^{-1}$ där D är en diagonal matris $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

och $P = [\mathbb{v}_1 \ \mathbb{v}_2 \ \mathbb{v}_3]$ är $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ A:s egenvärden

och $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ motsvarande egenvektorer

<u>a</u>: $\mathbb{v}_3 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ hör till $\lambda_3 = 1$.

Vi vet att $A\mathbb{v}_3 = 1 \cdot \mathbb{v}_3 \iff \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ \boxed{1 \quad -1 \quad 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ \boxed{0} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

<u>b</u>: $\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ b \end{bmatrix}$ hör till $\lambda_1 = 5$ Vi vet att $A\mathbb{v}_1 = 5\mathbb{v}_1 \iff$

$$\begin{bmatrix} \boxed{2 \quad -1 \quad 2} \\ -1 \quad 2 \quad -2 \\ 1 \quad -1 \quad 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ b \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{-5} \\ 5 \\ 5b \end{bmatrix} \Rightarrow -3 + 2b = -5 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

c: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ hör till $\lambda_2 = c$. Vi vet att $A\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_2 \iff$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ \boxed{1 \quad -1 \quad 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ 0 \\ \boxed{-c} \end{bmatrix} \Rightarrow -1 = -c \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

d: Vi vet att $PP^{-1} = I$ eller

$$\boxed{\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} \boxed{-1 \quad 2 \quad 1} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & \boxed{-2} \\ 1 & -1 & \boxed{d} \\ 1 & 3 & \boxed{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(2 + 2d + 2) = 0 \Rightarrow \boxed{d = -2}$$

Så $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(Även a och b kunde ha hittats på liknande sätt som d.)

4. En nilpotent matris A uppfyller

- $A^k = 0$, för något $k \geq 0$
- $A^j \neq 0$, $j < k$.

Visa att

a) en nilpotent matris är ej inverterbar

b) om en nilpotent matris är diagonaliserbar är $A = 0$.

a) A ej inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

Vi har $A^k = 0 \Rightarrow$

$$0 = \det A^k = \det(\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k}) = (\det A)^k \Rightarrow \det A = 0$$

$\Rightarrow$ A är ej inverterbar om A är nilpotent eftersom $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ ej inverterbar.

b) A diagonaliserbar $\Rightarrow A = PDP^{-1}$, $P = [v_1 \dots v_n]$ är inverterbar

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Eftersom A är nilpotent finns $k \geq 0$ så att

$$A^k = PD^kP^{-1} = 0 \Rightarrow D^k = P^{-1}\underbrace{A^k}_{=0}P = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow D = 0$

$\Rightarrow A = PDP^{-1} = 0$