RÖ 11. MINSTA-KVADRATMETODEN, SYMMETRISKA MATRISER

Minsta-kvadratmetoden

Approximativ lösning till ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta som saknar lösning (överbestämt system).

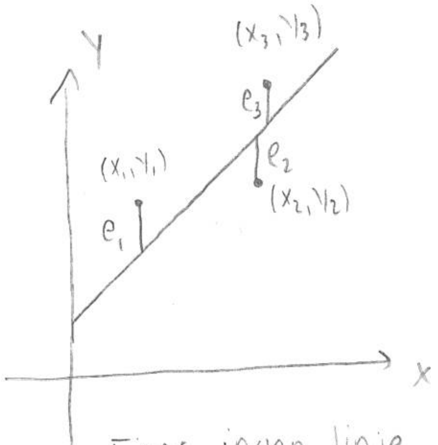
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad , \quad A \text{ } m \times n\text{-matris med } m > n.$$

Istället löser vi

$$\underbrace{A^T A}_{n \times n} \mathbf{x} = A^T \mathbf{b} \qquad \text{(normalekvationerna)}$$

som har en lösning.

Vanlig tillämpning: Anpassa linje till punkter



Vill anpassa en rät linje $y = kx + m$.
Vad ska k och m vara?

Vi vill lösa

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + m \\ y_2 = kx_2 + m \\ y_3 = kx_3 + m \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Finns ingen linje som går genom alla punkter. Minsta-kvadratmetoden ger den linje som minimerar $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = \sum_{i=1}^{3} e_i^2$

Om vi löser $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$, eller

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

får vi k och m som i figuren.

6.5.4. Beräkna minsta-kvadratlösningen $\hat{x}$ till $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b}$.

Vi löser normalekvationerna $A^T A \hat{x} = A^T b$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Vårt nya ekvationssystem blir

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix} \iff$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 11 & 14 \end{array}\right] \begin{matrix} \frac{1}{3} & (-1) \\ & \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 8 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \frac{1}{8} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-1) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.5.8 Beräkna minsta-kvadratfelet i uppgift 6.5.4.

Egentligen vill vi lösa $Ax = b$. $(*)$

Vi löser istället $A^T A \hat{x} = A^T b$, och säger att $\hat{x}$ är en minsta-kvadrat-lösning till $(*)$.

Om $\hat{x}$ ej löser $(*)$ exakt kommer $A\hat{x} = \hat{b} \neq b$.

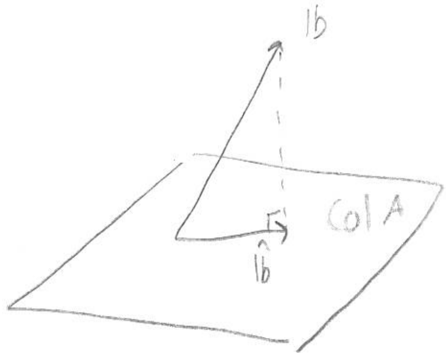
Minsta-kvadratfelet är $\|b - \hat{b}\| = \|b - A\hat{x}\|$

Vi har

$$\hat{\mathbf{b}} = A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{så} \quad \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Felet blir

$$\|\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$



Det finns bara en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ för de $\mathbf{b}$ som finns i Col A.

Minsta-kvadratmetoden ger lösningen till en ny ekvation

$$A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}},$$

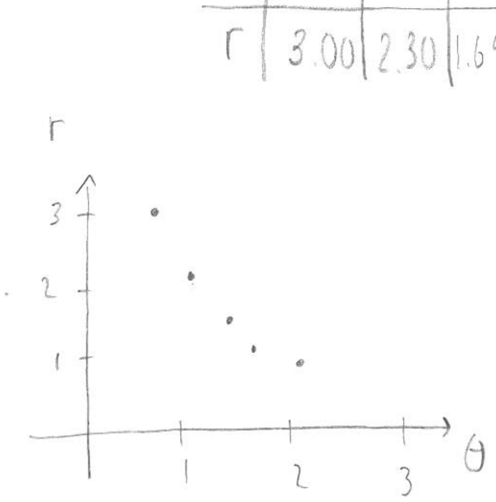
där $\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{\text{Col}A}\,\mathbf{b}$.

6.6.11. Använd minsta-kvadratmetoden för att anpassa en kurva på formen $r = \beta + e(r\cos\theta)$ till mätdatan

θ	.88	1.10	1.42	1.77	2.14
r	3.00	2.30	1.65	1.25	1.01

Vi ska bestämma β och e

$\Rightarrow$ de hamnar i lösningsvektorn $\begin{bmatrix} \beta \\ e \end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix} 1 & r_1\cos\theta_1 \\ 1 & r_2\cos\theta_2 \\ 1 & r_3\cos\theta_3 \\ 1 & r_4\cos\theta_4 \\ 1 & r_5\cos\theta_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3\cdot\cos 0.88 \\ 1 & 2.3\cdot\cos 1.10 \\ 1 & 1.65\cdot\cos 1.42 \\ 1 & 1.25\cdot\cos 1.77 \\ 1 & 1.01\cdot\cos 2.14 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} \beta \\ e \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3.00 \\ 2.30 \\ 1.65 \\ 1.25 \\ 1.01 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad \Rightarrow \quad A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2.41 \\ 2.41 & 0.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.21 \\ 7.68 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 0.811 \end{bmatrix}$$

Diagonalisering av kvadratiska matriser

Om en $n \times n$-matris A är symmetrisk ($A^T = A$) gäller

$$A = PDP^T$$

för $P = [\mathbf{v}_1 \; \dots \; \mathbf{v}_n]$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \cdot & & 0 \\ & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ där

$\mathbf{v}_1, \; , \mathbf{v}_n$ är n st. ortonormala egenvektorer till A och

$\lambda_1, \; , \lambda_n$ är motsvarande egenvärden.

A symmetrisk $\Rightarrow$ egenvektorer till olika egenvärden är ortogonala

7.1.17. Ortogonaldiagonalisera $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, då $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$

är egenvärden till A.

Hitta motsvarande egenvektorer:

$\boxed{\lambda_1 = -4}$ $\quad [A + 4I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -5 \\ -1 \\ \end{array} \sim$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & -44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

normera!

$\boxed{\lambda_2 = 4}$ $\quad [A-4I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} 3 & -5 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \mathbb{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

normera

$\boxed{\lambda_3 = 7}$ $\quad [A-7I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} 6 & -5 \end{matrix} \sim$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 11 & 0 \\ 0 & 11 & -11 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbb{V}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = PDP^T$