RÖ12 KRYSSUPPGIFTER

1. Bestäm alla lösningar till $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

$(x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ x_3 = x_3(t))$

Lösningarna ges av

$$\mathbb{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbb{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbb{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\mathbb{v}_3 ,$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ egenvärden och $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ egenvektorer till A.

Egenvärden: A är triangulär $\Rightarrow$ egenvärden på diagonalen

$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 3$

Egenvektorer: Löser $A\mathbb{v} = \lambda\mathbb{v}$ eller $(A - \lambda I)\mathbb{v} = \mathbb{0}$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ $\quad [A - 2I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

y_1 fri

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{v}_1}$$

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ $\quad [A - (-1I) \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

y_2 fri

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{v}_2}$$

$\boxed{\lambda_3 = 3}$: $[A-3I\,|\,0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left(-\tfrac{1}{4}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-3)$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{y_3}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_3}$$

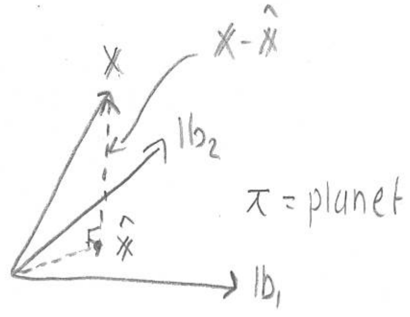
y_3 fri

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Låt en bas för planet $U \subset \mathbb{R}^3$ ges av vektorerna $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Låt $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vilken är den närmsta punkten i U till $\mathbf{x}$? Vad är avståndet mellan dem?

b) Samma som a) med $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$.



a) Närmsta punkten $\hat{\mathbf{x}}$ är projektionen av $\mathbf{x}$ på planet.

Om basen för planet är ortogonal, dvs om $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0$, är

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathrm{proj}_{\pi}\, \mathbf{x} = \left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_1}\right)\mathbf{b}_1 + \left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{b}_2}\right)\mathbf{b}_2$$

Vi har $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0$ $\Rightarrow$ vi kan använda formeln ovan.

$$\hat{x} = \frac{(3,4,2)\cdot(-1,2,1)}{(-1,2,1)\cdot(-1,2,1)}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} + \frac{(3,4,2)\cdot(2,1,0)}{(2,1,0)\cdot(2,1,0)}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{-3+8+2}{1+4+1}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} + \frac{6+4+0}{4+1+0}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{7}{6}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix}-7\\14\\7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}24\\12\\0\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}17\\26\\7\end{bmatrix}$$

Avståndet $d = \| x - \hat{x} \|$

$$x - \hat{x} = \begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix}17\\26\\7\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix}18\\24\\12\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}17\\26\\7\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{1}{6}\sqrt{1^2+(-2)^2+5^2} = \frac{1}{6}\sqrt{30} = \frac{1}{6}\sqrt{6\cdot 5} = \sqrt{\frac{5}{6}} \text{ l.e.}$$

b) Notera att $y = 2\cdot b_1 + 3\cdot b_2 \Rightarrow y$ ligger i planet $\Rightarrow \hat{y} = y$ och $d = 0$!

Detta ser vi även om vi räknar ut projektionen

$$\hat{y} = \left(\frac{y\cdot b_1}{b_1\cdot b_1}\right) b_1 + \left(\frac{y\cdot b_2}{b_2\cdot b_2}\right) b_2 = \frac{(4,7,2)\cdot(2,1,0)}{(2,1,0)\cdot(2,1,0)}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$+ \frac{(4,7,2)\cdot(-1,2,1)}{(-1,2,1)\cdot(-1,2,1)}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} = \frac{8+7}{4+1}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{-4+14+2}{1+4+1}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$= 3\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\7\\2\end{bmatrix} = y. \quad \Rightarrow \quad y - \hat{y} = 0 \Rightarrow d = \|y - \hat{y}\| = 0$$

3. Låt W vara det plan i $\mathbb{R}^4$ som ges av ekvationen $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.
Bestäm en ortonormal bas för W.

Alla $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ i W kan skrivas $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(lös ut x_1 ur ekvationen så ser vi att x_2, x_3, x_4 är fria)

$\Rightarrow$ en bas för W är $B = \left\{ \underset{\mathbf{b}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{\mathbf{b}_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{\mathbf{b}_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$

Gram-Schmidtprocessen ortogonaliserar B.
Vi vill hitta en bas $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, där $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är ortogonala.

1 Låt $\mathbf{v}_1 = \dfrac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. Låt $\mathbf{v}_2 = \dfrac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|}$, där $\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2 - \left(\dfrac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1$

$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (-1,0,1,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. Låt $\mathbf{v}_3 = \dfrac{\mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_3\|}$, där $\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3 - \text{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{b}_3 - \text{proj}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{b}_3 =$

$$= \mathbb{b}_3 - \left(\frac{\mathbb{b}_3 \cdot \mathbb{V}_1}{\mathbb{V}_1 \cdot \mathbb{V}_1}\right)\mathbb{V}_1 - \left(\frac{\mathbb{b}_3 \cdot \mathbb{V}_2}{\mathbb{V}_2 \cdot \mathbb{V}_2}\right)\mathbb{V}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} - (1,0,0,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$- (1,0,0,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}2\\-2\\2\\6\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\3\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{V}_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}\sqrt{12}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\3\end{bmatrix}$$

Så $B_2 = \{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$ är en ortonormal bas

för W.

4. Låt $U = \left\{\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0\right\}$.

En bas för U ges av $C = \left\{\underset{\mathbb{C}_1}{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}}, \underset{\mathbb{C}_2}{\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}}\right\}$.

Låt T vara den ortogonala projektionen på U.

a) Varför har vi <u>inte</u> $T(\mathbb{b}_1) = \left(\frac{\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{C}_1}{\mathbb{C}_1 \cdot \mathbb{C}_1}\right)\mathbb{C}_1 + \left(\frac{\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_2 \cdot \mathbb{C}_2}\right)\mathbb{C}_2$ här?

b) Visa att normalvektorn $\mathbb{n} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ är ortogonal mot U.

a) Denna formeln gäller bara om $C = \{\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2\}$ är en <u>ortogonal</u> bas för U.

Är C en ortogonal bas?

$\mathbb{C}_1 \cdot \mathbb{C}_2 = (-2,1,0)\cdot(-3,0,1) = 6 \neq 0 \Rightarrow \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ <u>ej</u> ortogonala

$\Rightarrow$ C är inte en ortogonal bas

$\Rightarrow$ formeln fungerar inte!

b) $\mathbb{n}$ är ortogonal mot U om $\mathbb{n}$ är ortogonal mot basvektorerna för U.

$\mathbb{n} \cdot \mathbb{c}_1 = (1,2,3) \cdot (-2,1,0) = -2+2=0$ ok!

$\mathbb{n} \cdot \mathbb{c}_2 = (1,2,3) \cdot (-3,0,1) = -3+3=0$ ok!

Därför är $\mathbb{n}$ ortogonal mot alla vektorer i U, eftersom

$$\mathbb{n} \cdot (a\mathbb{c}_1 + b\mathbb{c}_2) = a(\mathbb{n} \cdot \mathbb{c}_1) + b(\mathbb{n} \cdot \mathbb{c}_2) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

och alla vektorer $\mathbb{u} \in U$ kan skrivas på formen

$$\mathbb{u} = a\mathbb{c}_1 + b\mathbb{c}_2$$

för några konstanter a och b.

Alt 2: Varje $\mathbb{v}$ i U kan skrivas $\mathbb{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ med $v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$.

Alltså är

$$\mathbb{v} \cdot \mathbb{n} = [v_1 \ v_2 \ v_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3 = 0$$

för varje $\mathbb{v}$ i U pga definitionen av U,

Och $\mathbb{n}$ är ortogonal mot U.