RÖ 13 KRYSSUPPGIFTER, REPETITION

1. Speglingen av $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ i ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ ges av punkten

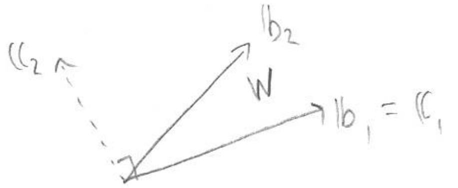
$$\mathbb{y} = (2 \operatorname{proj}_W \mathbb{x}) - \mathbb{x}$$

där $\operatorname{proj}_W \mathbb{x}$ är ortog. projektionen av $\mathbb{x}$ på W.

Bestäm speglingen av $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ i planet $W = \operatorname{span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{b}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{b}_2} \right\}$.

$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2$ är en bas för W, är det en ortogonal bas?

$\mathbb{b}_1 \cdot \mathbb{b}_2 = [1 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -1 + 0 + 6 = 5 \neq 0 \implies$ nej!



För att kunna använda formeln

$$\hat{\mathbb{x}} = \left(\frac{\mathbb{x} \cdot \mathbb{c}_1}{\mathbb{c}_1 \cdot \mathbb{c}_1}\right) \mathbb{c}_1 + \left(\frac{\mathbb{x} \cdot \mathbb{c}_2}{\mathbb{c}_2 \cdot \mathbb{c}_2}\right) \mathbb{c}_2$$

för projektionen på ett plan som spänns av $\{\mathbb{c}_1, \mathbb{c}_2\}$ måste $\mathbb{c}_1 \cdot \mathbb{c}_2 = 0$

$\implies$

vi måste skapa en ny bas för W som är ortogonal. (se figuren ovan)

Det gör vi med Gram-schmidt processen

1. $\mathbb{c}_1 = \mathbb{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. $\mathbb{c}_2 = \mathbb{b}_2 - \operatorname{proj}_{\mathbb{c}_1} \mathbb{b}_2 = \mathbb{b}_2 - \left(\frac{\mathbb{b}_2 \cdot \mathbb{c}_1}{\mathbb{c}_1 \cdot \mathbb{c}_1}\right) \mathbb{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{(-1,1,3) \cdot (1,0,2)}{(1,0,2) \cdot (1,0,2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{5}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\implies \{\mathbb{c}_1, \mathbb{c}_2\}$ en ortogonal bas för W.

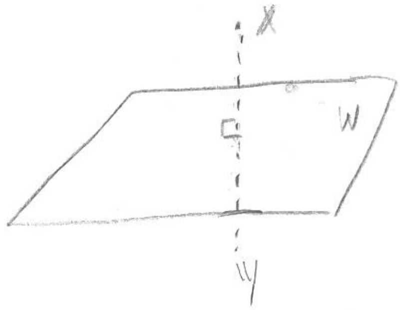
$\Rightarrow$ speglingen $\mathbb{y}$ ges av

$$\mathbb{y} = (2\,\text{proj}_W\, \mathbb{x}) - \mathbb{x} = 2\left[\left(\frac{\mathbb{x}\cdot \mathbb{c}_1}{\mathbb{c}_1\cdot\mathbb{c}_1}\right)\mathbb{c}_1 + \left(\frac{\mathbb{x}\cdot\mathbb{c}_2}{\mathbb{c}_2\cdot\mathbb{c}_2}\right)\mathbb{c}_2\right] - \mathbb{x}$$

$$= 2\left[\frac{(2,3,4)\cdot(1,0,2)}{(1,0,2)\cdot(1,0,2)}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \frac{(2,3,4)\cdot(-2,1,1)}{(-2,1,1)\cdot(-2,1,1)}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\right] - \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$= 2\left(\frac{10}{5}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \frac{3}{6}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = \cancel{2}\left(\frac{4}{\cancel{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \frac{1}{\cancel{2}}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2\\1\\9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-2\\5\end{bmatrix}$$



så $\mathbb{y} = \begin{bmatrix}0\\-2\\5\end{bmatrix}$

2. Bestäm baser för nollrummet och kolonnrummet till

$$A = \begin{bmatrix}9 & 0 & 9\\2 & 3 & 5\\7 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

Nul A: Nul A $= \{\mathbb{x} : A\mathbb{x} = \mathbb{0}\}$ = alla lösningar till ekvationen $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$

1. Hitta lösningarna till $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}9 & 0 & 9 & 0\\2 & 3 & 5 & 0\\7 & 1 & 8 & 0\end{array}\right] \begin{matrix}1/9\\ \\ \\\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\2 & 3 & 5 & 0\\7 & 1 & 8 & 0\end{array}\right] \begin{matrix}-2 \;\; -7\\ \\ \\\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 3 & 3 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \begin{matrix}\\ \\ -3\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

x_3 fri

$\Rightarrow \mathbb{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$ Detta är Nul A! DVS Nul A = span$\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$

Alla vektorer vi kan få genom att variera x_3. En linje eftersom en fri variabel/

en linjärt oberoende vektor definierar spannet.

Eftersom Nul $A = \text{Spann}\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ och $\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$ är linjärt oberoende

är $B = \left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ en bas för Nul A.

Col A: $\text{Col } A = \{\mathbb{b} : A\mathbb{x} = \mathbb{b}\}$ = alla vektorer vi kan få genom att ta $A\mathbb{x}$ för alla $\mathbb{x}$ som finns i $\mathbb{R}^3$.

En bas för Col A ges av pivotkolonnerna i A.

Vi såg tidigare

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

pivot pivot

$C = \left\{\begin{bmatrix}9\\2\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$ en bas för Col A.

OBS: Man måste ta pivotkolumnerna i A och inte de i den radreducerade formen av A.

3. Använd definitionen av norm för att visa parallellogramlagen

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Vi visar att VL = HL. Vi använder $\boxed{\|x\|^2 = x \cdot x}$

$$VL = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) - (u-v)\cdot(u-v)$$

$$= u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v + u\cdot u - u\cdot v - v\cdot u + v\cdot v$$

$= \{$def. av norm och $u\cdot v = v\cdot u\}$

$$= \|u\|^2 + \cancel{u\cdot v} + \cancel{u\cdot v} + \|v\|^2 + \|u\|^2 - \cancel{u\cdot v} - \cancel{u\cdot v} + \|v\|^2$$

$$= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = HL \quad , \text{ dvs}$$

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \text{VSV.}$$

4. En matris $B = (b_{ij})$ är symmetrisk om $b_{ij} = b_{ji}$, $1 \le i,j \le n$, och anti-symmetrisk om $b_{ij} = -b_{ji}$, $1 \le i,j \le n$.

Låt $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^n$ och visa

(a) $C = \dfrac{A+A^T}{2}$ är symmetrisk

(b) $D = \dfrac{A-A^T}{2}$ är anti-symmetrisk

Notera att $A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji})$

(a) $C = (c_{ij}) = \dfrac{(a_{ij}) + (a_{ji})}{2} = \{$matriser adderas elementvis$\} = \left(\dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2}\right)$

C är symmetrisk eftersom $c_{ij} = \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$ och $c_{ji} = \dfrac{a_{ji} + a_{ij}}{2} = \{$byt ordning på hur talen adderas$\} = \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2} = c_{ij}$,

dvs $c_{ij} = c_{ji}$

Vi kan även skriva ut matriserna och se att det blir symmetri.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Så $C = \dfrac{A+A^T}{2} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 2a_{11} & (a_{12}+a_{21}) & \cdots & (a_{1n}+a_{n1}) \\ (a_{21}+a_{12}) & & & \\ \vdots & & & \\ (a_{n1}+a_{1n}) & \cdots & & 2a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$ symmetrisk.

(b) $D = (d_{ij}) = \dfrac{(a_{ij}) - (a_{ji})}{2} = \left(\dfrac{a_{ij} - a_{ji}}{2}\right)$

Så

$d_{ij} = \dfrac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$ (elementet i rad i och kolonn j)

$d_{ji} = \dfrac{a_{ji} - a_{ij}}{2} = -\left[\dfrac{a_{ij} - a_{ji}}{2}\right] = -d_{ij}$ (elementet i rad j och kolonn i)

dvs D är anti-symmetrisk

$$D = \frac{A-A^T}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & (a_{12}-a_{21}) & \cdots & (a_{1n}-a_{n1}) \\ (a_{21}-a_{12}) & & & \\ \vdots & & & \\ (a_{n1}-a_{1n}) & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(a_{21}-a_{12}) & \cdots & -(a_{n1}-a_{1n}) \\ (a_{21}-a_{12}) & & & \\ \vdots & & & \\ (a_{n1}-a_{1n}) & \cdots & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & -d_{21} & \cdots & -d_{n1} \\ d_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ d_{n1} & \cdots & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

anti-symmetrisk.

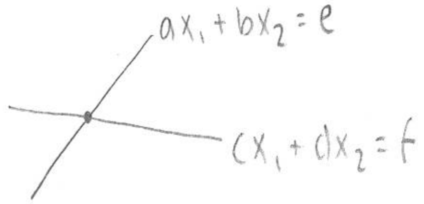
REPETITION

Linjära ekv.system

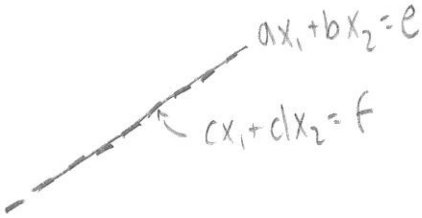
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = e \\ cx_1 + dx_2 = f \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \iff \left[\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right]$$

Kan ha

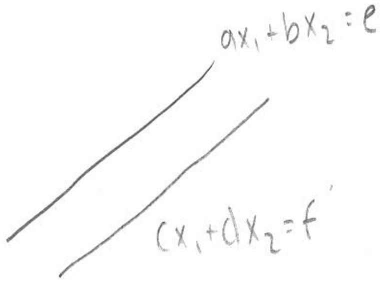
- en lösning



- oändl. många lösn.



- noll lösn.



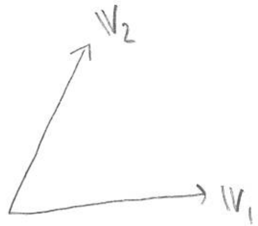
varje ekv. motsvarar en linje / ett plan / ...

beroende på hur många variabler vi har.

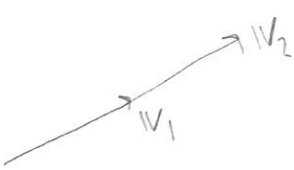
Beroende på om/hur dessa skär varandra får vi olika antal lösn.

Linjärt beroende / oberoende

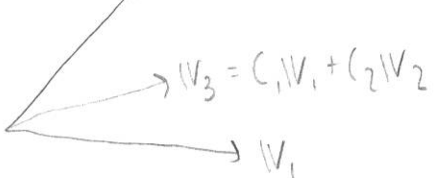
Exempel:



linjärt oberoende $\quad \mathbb{V}_1 \neq k\mathbb{V}_2$

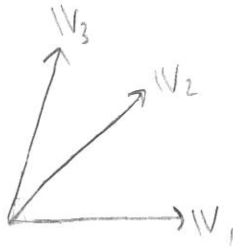


linjärt beroende $\quad \mathbb{V}_1 = k\mathbb{V}_2 \iff \mathbb{V}_1 - k\mathbb{V}_2 = \mathbb{O}$



$\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ linjärt beroende

$\mathbb{V}_3 = c_1\mathbb{V}_1 + c_2\mathbb{V}_2 \iff c_1\mathbb{V} + c_2\mathbb{V}_2 - \mathbb{V}_3 = \mathbb{O}$



($\mathbf{v}_3$ pekar ut ur planet spänt av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$)

linjärt oberoende

<u>Från definitionen</u> (kollar på tre vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, men gäller allmänt)

Lösningarna till

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

avgör om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linjärt beroende eller oberoende.

- <u>linjärt oberoende</u> om $[c_1\ c_2\ c_3] = [0\ 0\ 0]$ enda lösningen
- <u>linjärt beroende</u> om det finns en lösning $[c_1\ c_2\ c_3] \neq [0\ 0\ 0]$

Med matriser:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \iff [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{0}] = [A \mid \mathbf{0}]$$

- <u>linjärt oberoende</u> om 3 pivotkolonner i A ($[c_1\ c_2\ c_3] = [0\ 0\ 0]$ enda lösn.)
- <u>linjärt beroende</u> om < 3 pivotkolonner i A ($\exists$ lösn. $[c_1\ c_2\ c_3] \neq [0\ 0\ 0]$ eftersom vi har fria variabler)

$\boxed{\text{Linjärkomb. (av } \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)}$

$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$ en <u>linj. komb. av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$</u>

$\boxed{\text{Spann (av } \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)}$

Alla linj. komb. av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$

$$\text{Spann}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \{c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n : c_1, \ldots, c_n \text{ skalärer}\}$$

<u>Exempel</u>:

Spann$\{\mathbf{v}\}$

$= \{c\mathbf{v} : c \text{ skalär}\}$

<u>en linje</u>

Spann$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$= \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 : c_1, c_2 \text{ skalära}\}$

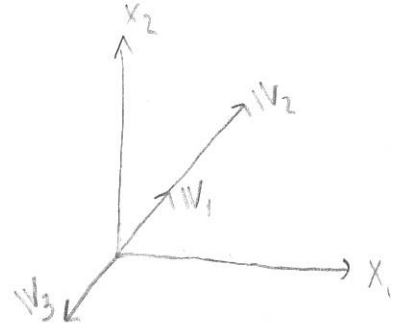
<u>ett plan</u>

$\boxed{\text{Vektorrum / underrum}}$

Spann$\{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_m\}$, $\mathbb{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$ är

- vektorrummet $\mathbb{R}^n$ om n st. av $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_m$ linjärt oberoende
- ett underrum i $\mathbb{R}^n$ om färre än n st. av $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_m$ linjärt oberoende.

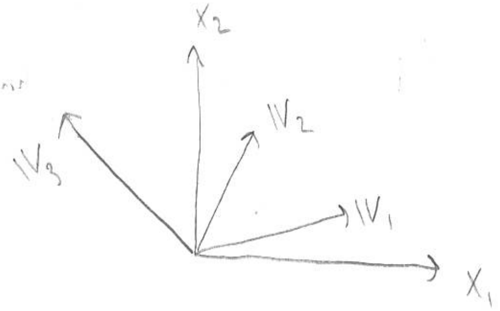
ex)



bara en av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ linjärt oberoende

$$\text{spann}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\} \overset{\uparrow}{=} \text{spann}\{\mathbb{v}_1\} = \text{spann}\{\mathbb{v}_2\}$$
$$= \text{spann}\{\mathbb{v}_3\} = \text{en linje i } \mathbb{R}^2$$

$\boxed{\text{Ett underrum i } \mathbb{R}^2}$



bara två av $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ linj. oberoende

$$\text{spann}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\} \overset{\uparrow}{=} \text{spann}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\}$$
$$= \text{spann}\{\mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\} = \text{spann}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_3\} = \mathbb{R}^2$$

$\boxed{\text{Vektorrummet } \mathbb{R}^2}$

$\boxed{\text{Kolonnrum / Nollrum}}$ (ex. på underrum)

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{n}\Big\}m = [\mathbb{a}_1 \dots \mathbb{a}_n]$$

$$\text{Nul } A = \{\mathbb{x} : A\mathbb{x} = \mathbb{0}\} = \text{alla lösningar till } A\mathbb{x} = \mathbb{0}$$

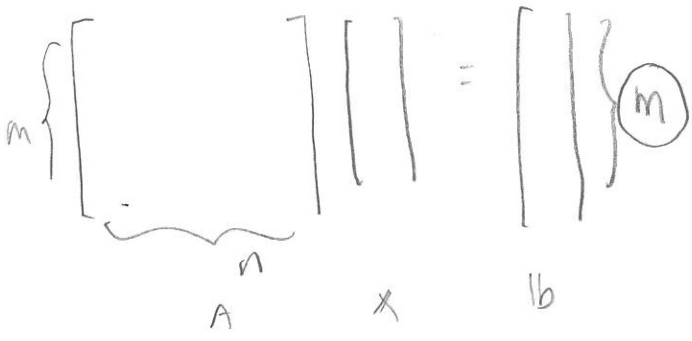
- Nul $A \subset \mathbb{R}^n$ eftersom en lösning $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$

$$m\Big\{\underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & n & \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbb{x}}\Big\}n = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{0}}\Big\}m$$

- Nul A ett underrum i $\mathbb{R}^n$

$\text{Col } A = \{\mathbf{b} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} = \{x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n : x_1, \dots, x_n \text{ skalärer}\}$

- Col $A \subset \mathbb{R}^m$ eftersom $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.



$= \text{spann}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$

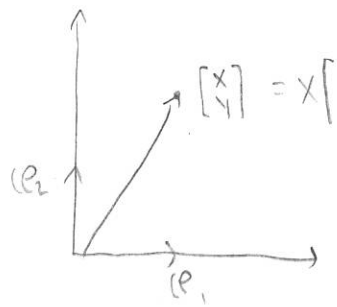
- Col A underrum i $\mathbb{R}^m$

Bas (för vektorrum / underrum V)

- $V = \text{spann}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} = \{c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n : c_1, \dots, c_n \text{ skalärer}\}$
- $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linjärt oberoende

$\Rightarrow B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ en <u>bas</u> för V.

ex)



$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ <u>linjärt oberoende</u> och <u>vi kan få alla vektorer i $\mathbb{R}^2$ från dem</u> $\Rightarrow$ de är en bas för $\mathbb{R}^2$.

Dimension (av vektorrum / underrum V)

dim V = antal vektorer i en bas för V.

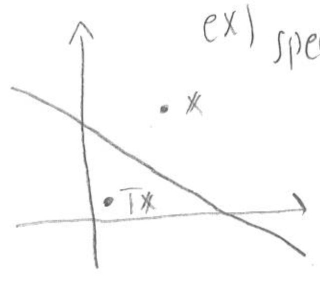
Linjär avbildning

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sådan att

$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$ för $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, c,d skalärer

$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för $A = [T\mathbf{e}_1 \dots T\mathbf{e}_n]$

ex) spegling



$\boxed{\text{Invers (till } n\times n\text{-matris } A)}$

En $n \times n$-matris A^{-1} sådan att

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Vill lösa $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$. Jämför $ax = b \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} b \Leftrightarrow x = a^{-1} b$

Vi vill ha samma för matriser.

$$\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$$

Existerar om A har
- n pivotpositioner $\Leftrightarrow$
- n linjärt oberoende kolonner $\Leftrightarrow$
- ...
- ...
- $\det(A) \neq 0$

$\boxed{\text{Determinant (av } n\times n\text{-matris } A)}$

Ett tal som hör till A.

$\det A = 0 \Leftrightarrow$
- A ej inverterbar
- A har ej n pivotpos.
- A har ej n linj. ob. kolonner

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow$
- A inverterbar
- A har n pivotpos.
- A har n linj. ob. kolonner.

Egenvektorer / -värden (till n×n-matris A)

De x, λ som löser

$$Ax = \lambda x$$

är egenvektorer och egenvärden till A.

Diagonalisering (av n×n-matris A)

Om A har n linj. oberoende egenvektorer $v_1, \dots, v_n$ är

$$A = PDP^{-1}, \text{ där}$$

$$P = [v_1 \dots v_n]$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \ddots & & 0 \\ & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

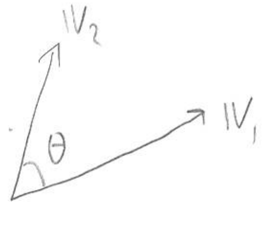
Bra för att räkna ut $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & & \\ 0 & \ddots & & \\ & & & 0 \\ & & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$

Geometriska saker

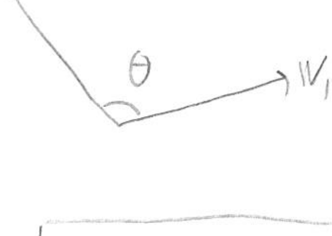
Skalärprodukt (av två vektorer v_1, v_2)

$$v_1 \cdot v_2 = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cos\theta$$

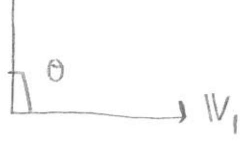
$v_1 \cdot v_2 > 0$ om $\theta < \frac{\pi}{2}$



$v_1 \cdot v_2 < 0$ om $\theta > \frac{\pi}{2}$

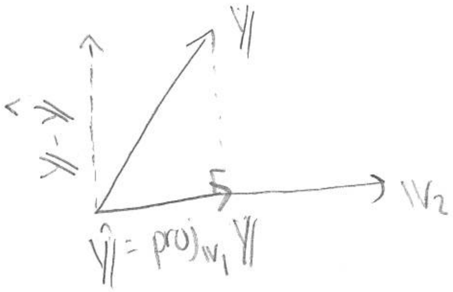


$v_1 \cdot v_2 = 0$ om $\theta = \frac{\pi}{2}$



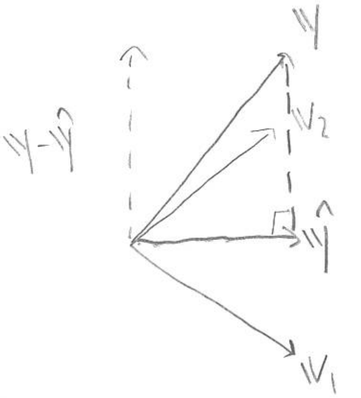
v_1, v_2 är då ortogonala

projektion



$\hat{y} = \text{proj}_{w_1} y = \left(\frac{y \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}\right) w_1$

Komponenten av y i w_1:s riktning

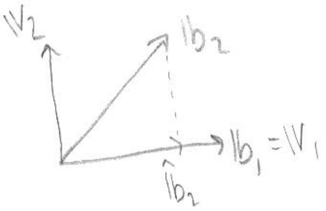


Kan dela upp en vektor i två delar med projektion.

$\hat{y} = \text{proj}_{w_1} y + \text{proj}_{w_2} y$

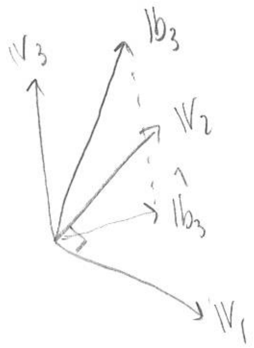
om . $w_1 \cdot w_2 = 0$ (w_1, w_2 ortogonala)

Gram-Schmidt (ortogonaliseringsprocess)



$\{b_1, b_2\}$ bas för ett plan, vill ha ortogonal bas för planet.

$w_2 = b_2 - \text{proj}_{w_1} b_2$

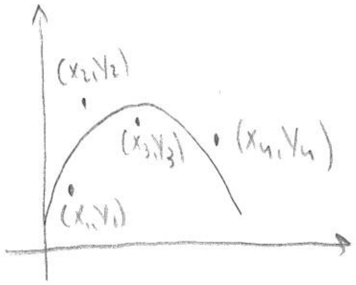


$\{b_1, b_2, b_3\}$ bas. för 3-D rum, vill ha ortogonal bas

Antar att vi fixat w_1 och w_2 som innan.

$w_3 = b_3 - (\text{proj}_{w_1} b_3 + \text{proj}_{w_2} b_3)$

$\boxed{\text{Minsta-kvadrat}}$ (anpassa kurva till mätdata)



Vill ha $y = a + bx + cx^2$

$$\begin{cases} y_1 = a + bx_1 + cx_1^2 \\ y_2 = a + bx_2 + cx_2^2 \\ y_3 = a + bx_3 + cx_3^2 \\ y_4 = a + bx_4 + cx_4^2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}}_{\mathbb{Y}}$$

Vill lösa $\mathbb{X}\mathbb{B} = \mathbb{Y}$.

överbestämt $\Rightarrow$ löser normalekvationerna

$$\mathbb{X}^T\mathbb{X}\hat{\mathbb{B}} = \mathbb{X}^T\mathbb{Y} \quad \Rightarrow \hat{\mathbb{B}} = (\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T\mathbb{Y}$$

så får vi kurvan som i figuren.

$\boxed{\text{Kvadratiska former}}$ (andragradsfunktion i flera variabler)

$$Q(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$$

$$= [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3] \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbb{x}^T A \mathbb{x} = Q(\mathbb{x})$$

A är symmetrisk $\Rightarrow A = PDP^T$ där $P = [\mathbb{v}_1 \ \mathbb{v}_2 \ \mathbb{v}_3]$ består av tre ortonormala egenvektorer till A. $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

Vi får

$$\mathbb{x}^T A \mathbb{x} = \mathbb{x}^T(PDP^T)\mathbb{x} = (\mathbb{x}^T P) D (P^T \mathbb{x}) = \underbrace{(P^T\mathbb{x})^T}_{\mathbb{y}^T} D \underbrace{(P^T\mathbb{x})}_{\mathbb{y}} = \mathbb{y}^T D \mathbb{y}$$

En ny kvadratisk form utan blandtermer $y_1y_2,\ y_1y_3,\ y_2y_3$

eftersom D är diagonal.

Vi kan jobba med denna istället.

$$Q(\mathbb{y}) = Q(\mathbb{x})$$

om $\mathbb{y} = P^T \mathbb{x} \iff \mathbb{x} = P\mathbb{y}$.