R014 KRYSSUPPGIFTER

1. Skriv den kvadratiska formen $Q(\mathbf{x}) = Q(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$

(a) på matrisform

(b) som en annan kvadratisk form utan blandtermer

Kan du säga ngt om vilka värden Q antar?

(a) Vi vill hitta en 3x3-matris A så att

$$Q = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Om $Q = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$ så

är $A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$

Vi får $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) A är symmetrisk, så vi kan ortogonaldiagonalisera A.

$A = PDP^T$, där $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$ är 3 ortogonala egenvektorer till A och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ är motsv. egenvärden.

Därför kan vi skriva

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (PDP^T)\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T P) D (P^T \mathbf{x}) = (P^T\mathbf{x})^T D (P^T \mathbf{x})$$

$$= \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = Q_2(\mathbf{y})$$

där $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x}$ eller $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ (eftersom $P^T = P^{-1}$)

Eftersom D är diagonal kommer den kvadratiska formen bli

$$Q_2(\mathbb{y}) = \mathbb{y}^T D \mathbb{y} = [y_1 \; y_2 \; y_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$$

dvs utan blandtermer!

A:s egenvärden ges av

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(3-\lambda)\cdot\lambda - 16\lambda = \lambda\left[(9-\lambda)(3-\lambda) - 16\right]$$

$$= \lambda\left(27 - 12\lambda + \lambda^2 - 16\right) = \lambda\left(\lambda^2 - 12\lambda + 11\right) = \lambda(\lambda-11)(\lambda-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 11, \; \lambda_3 = 1$$

A:s egenvektorer ges av:

$\boxed{\lambda_1 = 0}$ $[A - 0I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \frac{1}{4} \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/4 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -9 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & -11/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\frac{4}{11} \\ \\ \end{array}$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -3/4 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{x} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_3 fri

$\boxed{\lambda_2 = 11}$ $[A - 11I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

x_2 fri

normera.

$\boxed{\lambda_3 = 1}$ $[A - 1I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{x} = \frac{1}{2} x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Om A är symmetrisk är egenvektorer till olika egenvärden ortogonala, så nu har vi tre ortonormala egenvektorer $\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{V}_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{V}_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{V}_3} \right\}$

$$\Rightarrow A = PDP^T \text{ med } P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Om $\mathbb{X} = P\mathbb{Y}$ får vi

$$Q_2(\mathbb{Y}) = 11 y_2^2 + y_3^2$$

Eftersom alla egenvärden till A är positiva eller noll är Q positivt semidefinit, dvs

$$Q_2(\mathbb{Y}) \geq 0, \forall \mathbb{Y} \iff \boxed{Q(\mathbb{X}) \geq 0, \forall \mathbb{X}.}$$

2. Låt $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ vara en LU-faktorisering av en matris A.

Beräkna $\det(A^{-1})$.

$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ och $\det(A) = \det(LU) = \det L \cdot \det U$

$= \{$ determinanten av triangulär matris produkten av diagonalelementen $\}$

$= (1\cdot1\cdot1\cdot1)\cdot((-1)\cdot4\cdot3\cdot2) = -24$

$\Rightarrow \det(A^{-1}) = -\frac{1}{24}$

3. Ge ett exempel på att om A och B är två $n\times n$-matriser med egenvärden $\lambda_1^A, \ldots, \lambda_n^A$ och $\lambda_1^B, \ldots, \lambda_n^B$ så är egenvärdena för $A+B$ inte $\lambda_1^A+\lambda_1^B, \ldots, \lambda_n^A+\lambda_n^B$.

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Då är $\lambda_1^A = \lambda_2^A = 1$ och $\lambda_1^B = \lambda_2^B = 1$, men

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A+B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \pm 1 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

med egenvärden $\lambda_1^{A+B} = 2$ och $\lambda_2^{A+B} = 3 \neq 2$.

4. För alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \quad \text{(Cauchy-Schwarz olikhet)}$$

Använd detta för att visa triangelolikheten

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2$$

$$\leq \{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq |\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\} \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| + \|\mathbf{y}\|^2$$

$$\leq \{\text{Cauchy-Schwarz}\} \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2$$

$$= \left\{\begin{array}{c}\text{kvadreringsregeln} \\ \text{baklänges}\end{array}\right\} = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$$

$\Rightarrow$ ta roten ur båda sidor $\Rightarrow$

$\boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$ VSV.