TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Kryssuppgifter läsvecka 2

1

1. Övningsuppgift 1.3.26

$$A=\begin{bmatrix}2&0&6\\-1&8&5\\1&-2&1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}10\\3\\3\end{bmatrix},\quad W=\text{span}\{A\text{:s kolonner}\}=\text{Col}A$$

a) Är b i W?

b är i W om b är en linjär kombination av A:s kolonner, vilket är samma sak som att $Ax=b$ är lösbart.

$$[A \mid b]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&6&10\\-1&8&5&3\\1&-2&1&3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&5\\-1&8&5&3\\-1&2&-1&-3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&5\\0&8&8&8\\0&2&2&2\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&5\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

här ser vi att $Ax=b$ är lösbart (oändligt många lösningar)

Alltså är b i W

b) Visa att tredje kolonnen i A är i W.

Alltså: är $\begin{bmatrix}6\\5\\1\end{bmatrix}$ en linjärkombination av A:s kolonner?

Ja:

$$\begin{bmatrix}6\\5\\1\end{bmatrix}=0\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}+0\cdot\begin{bmatrix}0\\8\\-2\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}6\\5\\1\end{bmatrix}$$

---

2. Låt $v_1=\begin{bmatrix}1\\5\\-2\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}-2\\-4\\3\end{bmatrix}$ och $v_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$.

a) Spänner $\{v_1,v_2,v_3\}$ upp $\mathbb{R}^3$? I så fall, varför? Om inte, vad spänner de upp?

b) Samma frågor som i a), fast med $v_3=\begin{bmatrix}-5\\-1\\6\end{bmatrix}$

a) Vi radreducerar $[v_1\ v_2\ v_3]$ för att se deras beroende:

$$\begin{bmatrix}1&-2&2\\5&-4&-1\\-2&3&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}10&-20&20\\-10&8&2\\-10&15&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&2\\0&-12&22\\0&-5&25\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&2\\0&6&-11\\0&1&-5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\underline{1}&-2&2\\0&\underline{6}&-11\\0&0&\underline{1}\end{bmatrix}$$

Inga fria ger linjärt oberoende

span$\{v_1,v_2,v_3\}$ är alltså ett 3d-rum och eftersom $v_1,v_2,v_3\in\mathbb{R}^3$ (vi är i $\mathbb{R}^3$) blir

$$\text{span}\{v_1,v_2,v_3\}=\mathbb{R}^3$$

b) Samma procedur:

$$\begin{bmatrix}1&-2&-5\\5&-4&-1\\-2&3&6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}10&-20&-50\\-10&8&2\\-10&15&30\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&-5\\0&-12&-48\\0&-5&-20\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\underline{1}&-2&-5\\0&\underline{1}&4\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(En fri ger linjärt beroende)
2 pivot ger ett 2d-rum (plan)

3. Övningsuppgift 1.5.16

$$(*)\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

Skriv lösningen till (*) på parameterform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 - 4x_3 \\ x_2 = 3 + 3x_3 \\ x_3 \text{ fri} \end{cases}$$

Detta ger parameterformen:

$$x = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

alltså en linje (en fri) med riktningen $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ går genom punkten $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jämför med $x = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Båda är linjer med samma riktning men den första är förskjuten och går inte genom origo.

(Andra är ett underrum men inte första eftersom $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ inte ingår)

4. Övningsuppgift 1.7.14

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$$

Bestäm h så att vektorerna blir beroende

Radreducera:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 23 & h-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h-26 \end{bmatrix}$$

Vektorerna är oberoende om vi har fria.
Fria får vi om någon kolumn saknar pivot, dvs $h-26$ är 0.

Alltså om $h = 26$

TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Kryssuppgifter läsvecka 3

13.

1. Låt vektorerna $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ vara givna. Tolka u och v som 3×1-matriser och beräkna de så kallade *yttre produkterna* uv^T och vu^T. (Tips: du behöver bara *beräkna* en av dem.) Beräkna även $u^T v$ och $v^T u$, vilket ger något vi definierat via en summa tidigare – vad?

Lösn:

- $uv^T = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} [2\ 5\ 0] = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 8 & 20 & 0 \end{bmatrix}$

- $vu^T = \left\{ \begin{array}{l} \text{Använd reglerna} \\ (ab)^T = b^T a^T \\ \text{och} \\ (b^T)^T = b \end{array} \right\} = (uv^T)^T = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 8 & 20 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 15 & -5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $u^T v = [3\ -1\ 4] \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 1$

- $v^T u = \{\text{samma regler}\} = (u^T v)^T = (1)^T = 1$

De två sista är skalärprodukten $u \cdot v$.

---

2. En matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är *nilpotent* om det finns ett heltal $k \geq 1$ så att $A^k = 0$ men $A^j \neq 0$ för $j = 0, \ldots, k-1$. Visa att matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

är nil-potenta genom att bestämma ett sådant k för vardera matris.

Lösn:

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Alltså: $\left\{ \begin{array}{l} \text{för } A: k = 3 \\ \text{för } B: k = 3 \end{array} \right.$

3. Hitta inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ genom att radreducera $[A, I_3]$. Kan du från detta säga något om (alt. gissa) hur inversen till en godtycklig triangulär matris kommer att se ut?

$$[A \,\vdots\, I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

Alltså är $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1/2 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ också triangulär.

Om man tittar på $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ ser man att

aldrig kommer ändras eftersom är noll. Alltså blir alltid inversen för en triangulär matris triangulär.

---

4. LU-faktorisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & -11 \\ 10 & 1 & 11 \end{bmatrix}$ och använd denna faktorisering till att lösa systemet $Ax = b$ där $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Lösn: $A = LU$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & -11 \\ 10 & 1 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Ställ upp $A = LU$ så att L och U har rätt dimensioner och fyll i L:s ettor och nollor och U:s nollor

- Vi ser att $[1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ska bli 2 så ? måste vara 2
- Vi ser att $[1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ ? \\ 0 \end{bmatrix}$ ska blir 1 så första ? måste var 1.
- På detta sätt får vi att översta raden i U måste vara 2 1 3, dvs

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & -11 \\ 10 & 1 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

- Vi ser nu att $[?\ 1\ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ska blir -6 så $? = -3$.

$\longrightarrow$

- Vi får då

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & -11 \\ 10 & 1 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

- Vi ser att $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ ? \\ 0 \end{bmatrix}$ ska bli -4, alltså är $? = -1$.

- Vi ser att $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$ ska blir -11, så första $? = -2$

- Vi har nu:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & -11 \\ 10 & 1 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

- Vi ser att $\begin{bmatrix} ? & ? & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 10$, så första $? = 5$

- Vi ser att $\begin{bmatrix} 5 & ? & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$, så $? = 4$

- Vi har nu:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & -11 \\ 10 & 1 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

- Slutligen har vi $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ ? \end{bmatrix} = 11$ så $? = 4$.

- <u>Till slut</u>:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & -11 \\ 10 & 1 & 11 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$$

- Allt detta fyller man i direkt i (*) utan att skriva ut alla matriser som jag gjorde här.

Lös nu $Ax=b$ genom att använda $A=LU$

Vi har då

$$LUx=b$$

sätt $y=Ux$ så vi får

$$Ly=b$$

och lös:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right] \Rightarrow y = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$Ux=y$ ger nu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Longrightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Kryssuppgifter läsvecka 4

7.

1. Om en 4×7-matris har 3 pivotkolonner, är $\text{Col}\, A = \mathbb{R}^3$? Kan vi alltid lösa ekvationen $Ax = b$? Vad är dimensionen av $\text{Nul}\, A$? Motivera.

Lösn:

$$[A] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow}_{\text{pivoter}}$$

$\dim(\text{Col} A) = 3$ eftersom vi har 3 pivot

$(\text{rank} A = \dim(\text{Col} A))$

- Eftersom kolonnerna i A ligger i $\mathbb{R}^4$ är $\text{Col} A \subset \mathbb{R}^4$. I detta fall är $\text{Col} A$ ett 3d-delrum av $\mathbb{R}^4$, alltså är det inte $\mathbb{R}^3$.
- Väljer vi b till en vektor som ligger i $\mathbb{R}^4$ men inte i $\text{Col} A$ har inte $Ax=b$ någon lösning. Och ett sådant b kan vi välja eftersom $\text{Col} A$ inte är lika med $\mathbb{R}^4$.
  (Man ser också att om man väljer lämpligt b kan man få $0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \mid \cdot$ längst ner i den radreducerade matrisen.)
- $\dim(\text{Nul} A) = \text{antal fria} = 4$
  alternativt:
  $\dim(\text{Nul} A) = \text{antal kolonner} - \text{rank} A = 7 - 3 = 4$

---

2. Låt $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ och $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$. Visa att $\text{rank}\, AB \le \min(\text{rank}\, A, \text{rank}\, B)$ via två steg:

(a) Visa att $\text{rank}\, AB \le \text{rank}\, A$. [Tips: Om $v \in \text{Col}\, AB$, är $v \in \text{Col}\, A$?]

(b) Visa att $\text{rank}\, AB \le \text{rank}\, B$ [Tips: Applicera (a) på $(AB)^T$.]

Lösn:

a) $v \in \text{Col} AB \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}^r: \\ ABx = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ay = v \\ \text{där } y = Bx \end{cases} \Rightarrow v \in \text{Col} A$

Alltså: $v \in \text{Col} AB \Rightarrow v \in \text{Col} A$ vilket innebär $\text{Col} AB \subseteq \text{Col} A$

$\Rightarrow \dim(\text{Col} AB) \le \dim(\text{Col} A) \Leftrightarrow$ $\text{rank} AB \le \text{rank} A$

---

b) $x \in \text{Nul} B \Leftrightarrow Bx = 0 \Rightarrow ABx = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Nul} AB$

Alltså: $x \in \text{Nul} B \Rightarrow x \in \text{Nul} AB$ vilket innebär $\text{Nul} B \subseteq \text{Nul} AB$

$\Rightarrow \dim(\text{Nul} B) \le \dim(\text{Nul} AB) \Leftrightarrow$ antal kolonner $- \text{rank} B \le$ antal kolonner $- \text{rank} AB$

$\Leftrightarrow$ $\text{rank} AB \le \text{rank} A$

8.

3. Låt planet U i $\mathbb{R}^3$ ges av ekvationen $x + 2y + 3z = 0$. Då är U ett underrum av $\mathbb{R}^3$. Vad är dess dimension? Ange en bas för U.

Lösn:

U är alla $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller $x+2y+3z=0$.

Alltså: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

Så $U = \text{Nul}A$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]}_{2 \text{ fria ger } \dim U = 2}$ ger $\begin{cases} x = -2y-3z \\ y, z \text{ fria} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

en bas för U

---

4. Låt $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ och $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ vara två baser för $\mathbb{R}^2$. Bestäm basbytesmatriserna $\underset{C \leftarrow B}{P}$ och $\underset{B \leftarrow C}{P}$.

Vi vet:

$$\begin{cases} x = B[x]_B \\ x = C[x]_C \end{cases} \quad \text{(byte från bas till standard bas)}$$

Så:

$$B[x]_B = C[x]_C \Rightarrow \begin{cases} [x]_B = B^{-1}C[x]_C \\ [x]_C = C^{-1}B[x]_B \end{cases} \quad \text{(byte mellan baser)}$$

(B och C tolkas som $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.)

$B^{-1} = \dots = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ och $C^{-1} = \dots = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

- $P_{C \leftarrow B} = C^{-1}B = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 0 & -11 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$
- $P_{B \leftarrow C} = B^{-1}C = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$

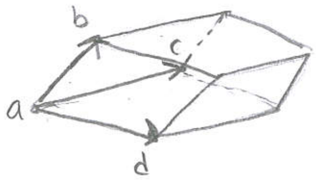
Alternativt: (jämför med $B[x]_B = C[x]_C$)

- $\left[B \mid C\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{c|cc} I & 2/11 & 1 \\ & -7/11 & 0 \end{array}\right]$

- $\left[B \mid C\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -11/7 & I \\ 1 & 2/7 & \end{array}\right]$

TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Kryssuppgifter läsvecka 5

1. Beräkna volymen av den parallellpiped som har de fyra närliggande hörnen $\underset{a}{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}$, $\underset{b}{\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}}$, $\underset{c}{\begin{bmatrix}2\\4\\7\end{bmatrix}}$ och $\underset{d}{\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}}$.



$$V = \left|\det\begin{bmatrix}\vec{ab} & \vec{ac} & \vec{ad}\end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix}b-a & c-a & d-a\end{bmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -3 & 4 & 0\end{vmatrix}\right| = \left|+0\begin{vmatrix}0 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 4\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\right| =$$

välj för kofaktorisering

$$= \left|-1\left(1\cdot 4 - (-3)\cdot 1\right)\right|$$

$$= |-7| = 7$$

(Notera att man kan välja vilket hörn som helst av de fyra som knutpunkt)

---

2. Om talen $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ är givna så kan man visa att $n \times n$-matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

uppfyller

$$\det(tI_n - C) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0.$$

Visa detta för $n = 4$. (Eller för alla n, för de riktigt ambitiösa). På engelska kallas C för *companion matrix* då den via detta samband går hand i hand med det givna polynomet. Notera att egenvärdena till C ges av rötterna till polynomet, då $\det(C - \lambda I_n) = (-1)^n \det(\lambda I_n - C)$.

$$\det(tI_n - C) = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t+c_{n-1} \end{vmatrix}$$

Använd nu att man får lägga till en multipel av en rad till en annan rad utan att determinanten ändras. Dela första raden med t och lägg till andra.

$$= \begin{vmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ 0 & t & 0 & \cdots & 0 & c_1 + \frac{c_0}{t} \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t+c_{n-1} \end{vmatrix}$$

= Fortsätt med andra raden enligt samma princip =

$$\begin{vmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ 0 & t & 0 & \cdots & 0 & c_1 + \frac{c_0}{t} \\ 0 & 0 & t & \cdots & 0 & c_2 + \frac{c_1}{t} + \frac{c_0}{t^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t+c_{n-1} \end{vmatrix}$$

= samma princip hela vägen =

$$\begin{vmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ 0 & t & 0 & \cdots & 0 & c_1 + \frac{c_0}{t} \\ 0 & 0 & t & \cdots & 0 & c_2 + \frac{c_1}{t} + \frac{c_0}{t^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t & c_{n-2} + \frac{c_{n-3}}{t} + \ldots + \frac{c_0}{t^{n-2}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t + c_{n-1} + \ldots + \frac{c_0}{t^{n-1}} \end{vmatrix}$$

Nu har vi en triangulär matris så determinanten är produkten av diagonalen

$$= \underbrace{t\cdots t}_{n-1 \text{ gånger}} \cdot \left(t + c_{n-1} + \frac{c_{n-2}}{t} + \ldots + \frac{c_0}{t^{n-1}}\right) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0$$

3. En matris A och dess diagonalisering ges av ekvationen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & d \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

På grund av en korrupt hårddisk saknas data för värdena a, b, c och d. Återskapa dessa utifrån vad du vet om egenvärden och egenvektorer (utan att utföra matris-matris-multiplikationen och lösa det resulterande ekvationssystemet).

10.

Lösn ($A = PDP^{-1}$)

- Först kollar vi om $\frac{1}{4}$ hör till den diagonala matrisen eller de andra två.

  PP^{-1} ska vara I, $[1\ 0\ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ blir 4 alltså måste $\frac{1}{4}$ tillhöra de andra två. Dvs 5, c och 1 är egenvärdena.

- $[2\ -1\ 2]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} = 5\cdot(-1)$ eftersom $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ b \end{bmatrix}$ ska blir 5 gånger längre när man multiplicerar med A. $\Rightarrow -2-1+2b=-5 \Rightarrow \boxed{b=-1}$

- $[2\ -1\ 2]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = c\cdot 2$ eftersom c är $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ egenvärde.

  $\Rightarrow 4-2 = c\cdot 2 \Rightarrow \boxed{c=1}$

- $[2\ -1\ 2]\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\cdot a$ eftersom $\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ har egenvärde 1

  $\Rightarrow 2a-1 = a \Rightarrow \boxed{a=1}$

- $[-1\ 2\ a]\begin{bmatrix} -2 \\ d \\ 2 \end{bmatrix} = 0$ eftersom $PP^{-1} = I$

  $\Rightarrow 2+2d+2 = 0 \Rightarrow \boxed{d=-2}$

4. I kryssuppgifterna för LV3 definierades en nilpotent matris som en matris A för vilken $A^k = 0$ men $A^j \neq 0$ för $j = 0, \ldots, k-1$. Visa att

(a) En nilpotent matris A är inte inverterbar. [Tips: använd att $\det(AB) = \det A \det B$.]

(b) Om en nilpotent matris A är diagonaliserbar så är $A = 0$. [Tips: vad blir A^k?]

11.

a) Vi vet att om $\det(A)=0$ så är A inte inverterbar.
Så vi försöker visa $\det(A)=0$.

$$A^k = 0 \Rightarrow \det(A^k)=0 \Leftrightarrow \det(A)^k = 0 \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow A \text{ ej inverterbar}$$

här använder vi
en viktig egenskap hos
de reella talen:
$a^k = 0 \Rightarrow a = 0$
(dvs: det enda nilpotenta
reella talet är 0)

b) $\begin{cases} A^k = 0 \\ A = PDP^{-1} \end{cases} \Rightarrow 0 = A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1} \cdot 0 \cdot P = D^k \Leftrightarrow 0 = D^k \Leftrightarrow D = 0$

$$\Rightarrow A = P \cdot 0 \cdot P^{-1} = 0$$

TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Kryssuppgifter läsvecka 6

12

1. Låt ett system av differentialekvationer ges av

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{med} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Bestäm alla lösningar $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$.

Lösn

$x = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ ges av formeln: $x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$

Därför behöver vi hitta egenvärden och egenvektorer.

- Egenvärden: triangulär matris ger egenvärden på diagonalen: $2, -1, 3$
- Egenvektorer: $(A - \lambda I)x = 0$

$\lambda = 2$:

$$[A - 2I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 \text{ fri} \end{cases} \Rightarrow x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1$:

$$[A + I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_2 \text{ fri} \end{cases} \Rightarrow x = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3$:

$$[A - 3I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3/2 \\ x_2 = x_3/2 \\ x_3 \text{ fri} \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{x_3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Svar:

$$x = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

---

2. Låt en bas för planet $U \subset \mathbb{R}^3$ ges av vektorerna $b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Låt $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vilken är den närmsta punkten i U till x? Vad är avståndet mellan dem?

(b) Samma som i a) men med punkten $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Närmsta punkten i U till x ges av projektionen av x på U.

Eftersom $b_1 \cdot b_2 = 0$ kan vi använda formeln utan att behöva ortogonalisera först.

$$x_{proj} = \frac{x \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 + \frac{x \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2} b_2 = \frac{7}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{10}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -7 + 24 \\ 14 + 12 \\ 7 + 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 17 \\ 26 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Avståndet blir $\|x - x_{proj}\| = \frac{\sqrt{30}}{6}$

b) Notera att $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2b_1 + 3b_2$

Dvs y är en linjärkombination av b_1 och b_2 och ligger alltså i U så $y_{proj} = y$ och $\|y - y_{proj}\| = 0$

3. Låt W vara det ~~plan~~ hyperplan i R^4 som ges av ekvationen $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Bestäm en ortonormal bas för W.

13

Lösn

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \iff \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

W är alltså Nul A. Skriv Nul A på parameterform för att få fram en bas:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2, x_3, x_4 \text{ fria} \end{cases} \Rightarrow \quad x = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \text{span} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3} \right\}$$

Nu ortogonaliserar vi v_1, v_2, v_3 m.h.a. Gram-Schmidt:

- $u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ~ använd $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ istället
- $u_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6-3-1 \\ 0-3+1 \\ 0-0+2 \\ 6-0+0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

~ använd $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ istället

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ är alltså en <u>ortogonal bas</u> för W

En <u>ortonormerad bas</u> blir:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

14.

4. I ett exempel på föreläsning 13 lät vi U vara det underrum till $\mathbb{R}^3$ som ges av

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \right\}.$$

En bas för U ges av vektorerna $c_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $c_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Låt nu T vara den ortogonala projektionen på U. Vi bestämde $T(b_k)$ för några vektorer b_k men *inte* genom att använda projektionsformeln som gavs i föreläsning 14.

(a) Varför har vi *inte* t.ex. $T(b_1) = \frac{b_1 \cdot c_1}{c_1 \cdot c_1} c_1 + \frac{b_1 \cdot c_2}{c_2 \cdot c_2} c_2$ här?

(b) Visa att *normalvektorn* $n = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ är ortogonal mot U.

Det senare gör att n spänner upp $U^\perp$ eftersom $\dim U = 2$ betyder att vi måste ha $\dim U^\perp = 3 - 2 = 1$. Alltså fungerar föreläsningens metod; $T(x) = x - \frac{x \cdot n}{n \cdot n} n$, där $\frac{x \cdot n}{n \cdot n} n$ är projektionen på $U^\perp$.

a) Eftersom $c_1 \cdot c_2 \neq 0$, dvs de är inte ortogonala vilket krävs för den formeln.

b) U är alla $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ så att $v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$ men

$$v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \iff n \cdot v = 0$$

Alltså är n ortogonal mot alla v i U och därför mot U.

Alternativt:

Tas v i U, då är $v = ac_1 + bc_2$ (en linjärkombination av c_1 och c_2) då blir

$$n \cdot v = n \cdot (ac_1 + bc_2) = a\underbrace{n \cdot c_1}_{=0} + a\underbrace{n \cdot c_2}_{=0} = 0$$

TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Kryssuppgifter läsvecka 7, del 1

15.

1. *Speglingen* av $x \in \mathbb{R}^n$ i ett underrum $W \subset \mathbb{R}^n$ ges av punkten

$$y = \text{proj}_W\, x + (\text{proj}_W\, x - x) = 2\,\text{proj}_W\, x - x,$$

där $\text{proj}_W\, x$ är den ortogonala projektionen av x på W. Bestäm speglingen av $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ i planet

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Lösn: För att räkna ut $\text{proj}_W x$ behöver vi en ortogonal bas för W vilket $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ inte är. Gram-Schmidt ger:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{5}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Så projektionen blir

$$\text{proj}_W x = \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{x \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{10}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{3}{6}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4-2 \\ 0+1 \\ 8+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- Speglingen blir

$$y = 2\,\text{proj}_W x - x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

---

2. Bestäm baser för nollrummet och kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Radreducera:

$$[A] \sim \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 \text{ fria} \end{cases} \Rightarrow x = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bas för nollrummet

pivot ger

$$\text{Col}\,A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

bas för kolonnrummet

3. Använd definitionen av norm för att visa parallellogramlagen: För alla $u, v \in \mathbb{R}^n$ gäller att

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 .$$

Lösn Vi vet: $\|u\|^2 = u \cdot u$, så

kvadratregeln (funkar på skalärprodukt)

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) + (u-v)\cdot(u-v) = u\cdot u + 2u\cdot v + v\cdot v + u\cdot u - 2u\cdot v + v\cdot v =$$

$$= 2u\cdot u + 2v\cdot v = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

4. En matris $B = (b_{ij})$ är *symmetrisk* om $b_{ij} = b_{ji}$ för $1 \leq i, j \leq n$ och *anti-symmetrisk* om $b_{ij} = -b_{ji}$ för $1 \leq i, j \leq n$. Låt nu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^n$ och visa att

(a) Matrisen $C = \frac{A+A^T}{2}$ är symmetrisk.

(b) Matrisen $D = \frac{A-A^T}{2}$ är anti-symmetrisk.

Alltså kan vi alltid dela upp $A = C + D$ i symmetriska och anti-symmetriska delar!

a) Vi ska visa att C är symmetrisk, dvs $c_{ij} = c_{ji}$.

Så vi börjar med c_{ij}:

$$c_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tänk vad som} \\ \text{finns på plats} \\ (i,j) \text{ i } C \end{array} \right\} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$$

och för c_{ji}

$$c_{ji} = \frac{a_{ji} + a_{ij}}{2}$$

de är samma (eftersom $\alpha + \beta = \beta + \alpha$) $\Rightarrow$ $c_{ij} = c_{ji}$

b) Vi ska visa att $d_{ij} = -d_{ji}$.

$$d_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$$

$$d_{ji} = \frac{a_{ji} - a_{ij}}{2} = -\frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$$

Vi ser att $d_{ij} = -d_{ji}$

Illustration:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots \\ c_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots \\ a_{12} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \right)$$

TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Kryssuppgifter läsvecka 7, del 2

17

1. Skriv den kvadratiska formen $Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$

   (a) på matrisform, och

   (b) som en annan kvadratisk form utan blandtermer.

   Kan du via detta säga något om vilka värden Q antar?

Lösn:

3 variabler medför att A ska vara 3x3.

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{Vi får } A = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så
$$Q(x) = x^TAx = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(Notera att vi vill att A ska bli symmetrisk.)

Om vi använder $A = PDP^{-1}$ får vi $Q(x) = x^TAx = x^TPDP^{-1}x = \left\{ \begin{matrix} y = P^{-1}x \\ x = Py \end{matrix} \right\} = y^TDy = Q(y)$

- Alltså gör variabelbytet $y = P^{-1}x$ att vi slipper blandtermer.

- För att bestämma D behöver vi A:s egenvärden.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 9-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left((9-\lambda)(3-\lambda) - 16\right)$$
$$= -\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 11)$$

$-\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 11) = 0$ ger $\boxed{\lambda = 0, 1, 11}$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}, \quad Q(y_1, y_2, y_3) = y_2^2 + 11y_3^2$$

Eftersom $y_2^2 \geq 0$ och $y_3^2 \geq 0$ och $\lambda_{1,2,3} \geq 0$ kommer

$Q \geq 0$.

18.

2. Låt

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad U = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

vara en LU-faktorisering av matrisen A. Beräkna $\det(A^{-1})$. OBS: notera att du inte behöver beräkna A^{-1}!

Lösn:

$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \{\text{triangulära}\} = (1\cdot1\cdot1\cdot1)\cdot(-1\cdot4\cdot3\cdot2) = -24$

Eftersom $\det(A) \neq 0$ finns det en invers.

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \underline{\underline{-\frac{1}{24}}}$

---

3. Ge ett exempel på att om A och B är två $n \times n$-matriser med egenvärden $\lambda_1^A, \ldots, \lambda_n^A$ respektive $\lambda_1^B, \ldots, \lambda_n^B$ så är egenvärdena för $A + B$ *inte* $\lambda_1^A + \lambda_1^B, \ldots, \lambda_n^A + \lambda_n^B$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\underline{\lambda = 1,1 \qquad \lambda = 1,1}$ $\qquad \Rightarrow \underline{\lambda = -1, 3}$

---

4. Man kan visa att för $x, y \in \mathbb{R}^n$ gäller det alltid att

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

Detta kallas Cauchy-Schwarz olikhet. Använd detta för att visa (den oerhört viktiga) triangelolikheten:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \, .$$

Tips: vad blir $\|x + y\|^2$?

$\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y \leq \left\{\begin{matrix}\text{Eftersom} \\ x\cdot y \text{ kan} \\ \text{vara negativ} \\ \text{är} \\ |x\cdot y| \geq x\cdot y\end{matrix}\right\} \leq x\cdot x + 2|x\cdot y| + y\cdot y$

$= \|x\|^2 + 2|x\cdot y| + \|y\|^2 \leq \left\{\begin{matrix}\text{Använd} \\ \text{Cauchy-Schwarz}\end{matrix}\right\} \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 =$

$= \left\{\begin{matrix}\text{kvadreringsregeln} \\ \text{baklänges}\end{matrix}\right\} = (\|x\| + \|y\|)^2$

$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \Rightarrow \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$