MATEMATIK **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2007-01-17 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakter:Jonas Hartwig, Tommy Gustafsson

tel. 0762-721860/ 0762-721861

Linjär Algebra M1 (tmv165)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 05/06 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (06/07) webbsida 22/1 .

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) Bestäm ortogonala projektionen av $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ på Span$\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\}$ då (2p)

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(c) Beräkna $F(\mathbf{v})$ för $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ då $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är den linjära avbildning som ges av (3p)

$F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(d) Ange en bas för Nul(A) då $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. (2p)

(e) Ange en bas för Col(B) då $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Ange dim(Nul$(B)$). (3p)

(f) Ange vilka av följande vektorer: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$, som är egenvektorer till matrisen (2p)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \\ -5 & -4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. Ange också motsvarande egenvärden.

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Bestäm LU-faktoriseringen till matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (5p)

3. (a) Visa att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning då (2p)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(b) Bestäm minsta-kvadrat-lösningen till ekvationssystemet ovan. (5p)

Var god vänd!

4. $\mathcal{B} = \left\{\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T\right\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. I denna bas är $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ avbildningsmatris för den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. (6p)

Bestäm $T(\mathbf{v})$ (i standardbas) då $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T$ (också i standardbas).

5. Låt $\mathbb{P}_3$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 3. Låt U_1 vara det underrum av $\mathbb{P}_3$ vars element är alla polynom p som uppfyller $p(-1) = p(1)$. Låt U_2 vara det underrum av U_1 vars element dessutom uppfyller $p(1) = 0$. (6p)

Bestäm först en bas för U_2, fyll ut den till en bas för U_1 och slutligen till en bas för hela $\mathbb{P}_3$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) För alla matriser A gäller att $A^T A$ är en symmetrisk matris.

(b) Om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så är även $0.2\mathbf{x}_1 + 0.8\mathbf{x}_2$ lösning till detta ekvationssystem.

(c) Om kolonnvektorerna i matrisen A är linjärt beroende, så kan inte ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha entydig lösning för någon vektor $\mathbf{b}$.

(d) Det finns en 4×7-matris A sådan att $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = \dim(\mathrm{Col}(A))$.

(e) Alla kvadratiska matriser kan diagonaliseras.

(f) Om matrisen A har fler kolonner än rader, så är $\det(A^T A) = 0$.

7. (a) Definiera begreppet *linjärt beroende mängd av vektorer* i $\mathbb{R}^n$. (1p)

(b) Visa med definitionens hjälp, att varje mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ som innehåller nollvektorn, är en *linjärt beroende mängd av vektorer.* (2p)

(c) Bevisa, att varje mängd bestående av fem vektorer i $\mathbb{R}^4$, är linjärt beroende. (3p)

Lycka till!
C-H F