MATEMATIK **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2008-08-23 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Oscar Marmon

tel. 0762-721860

Linjär Algebra M1 (tmv165)

Skriv tentamenskod tydligt på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget och placeringslistan noggrannt och tydligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 07/08 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (07/08) webbsida senast 25/8. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 6 \\ -4 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) Ange en kvadratisk matris som inte är diagonaliserbar. (2p)

(c) Ange en ortogonal bas för (2p)
Span$\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}^T\}$.

(d) En linjär avbildning $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbildar vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ på respektive $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Bestäm matrisen för A i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ och bilden av vektorn $2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$. (2p)

(e) Ange alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2p)

(f) Lösningsmängden till ekvationen $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = 0$ är tre linjer i xy-planet. (2p)
Ange ekvationer för var och en av dessa.

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (6p)

Matrisen A har egenvärden $\lambda = 0$ och $\lambda = 2$, båda av multiplicitet 2.

Ge argument som visar att A är diagonaliserbar.

Bestäm en bas för $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till A. Ange en matris som diagonaliserar A och ange motsvarande diagonalmatris.

3. Betrakta följande fyra vektorer i $\mathbb{R}^4$: (6p)

$$\mathbf{u}_1 = [1, 2, p, 3]^T, \mathbf{u}_2 = [1, 1, 1, 1]^T, \mathbf{u}_3 = [2, 1, 0, p]^T, \mathbf{u}_4 = [3, 2, -5, 1]^T.$$

Om $p = 0$ så är $\mathbf{u}_1$ en linjärkombination av de tre övriga vektorerna. Bestäm denna linjärkombination. För vilka andra värden på p är någon av vektorerna en linjärkombination av de övriga.

Var god vänd!

4. (a) Antag att A är en 2×2-matris som har egenvektorerna $\mathbf{v}_1 = [1\ 1]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [-1\ 1]^T$ med egenvärdena 1 respektive 2. (2p)

Bestäm $\mathbf{x}_n$ för $n = 1, 2, \ldots$ då $\mathbf{x}_0 = [0\ 1]^T$ och $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Med samma A som i (a) betraktar vi systemet av differentialekvationer $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ med $\mathbf{x}(0) = [0\ 1]^T$. (4p)

Bestäm $\mathbf{x}(t)$.

För full poäng skall du motivera din lösningsmetod väl.

5. (a) Bestäm ekvationen för den linje som i minstakvadratmetodens mening anpassar bäst till punkterna (-2,-2), (-1,-1), (0,2) och (1,3). (4p)

(b) Låt (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm den vektor i A:s kolonnrum som ligger närmast $\mathbf{y}$. Förklara sambandet mellan dessa två deluppgifter.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om A och B är två kvadratiska matriser av samma typ, så gäller $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(b) Om $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^5$ så gäller $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\} = \mathbb{R}^5$.

(c) Om A är en matris sådan att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^4$, så har matrisen A minst fyra kolonner.

(d) Mängden av polynom p av formen $p(t) = t^2 + at + b$ där a och b är godtyckliga reella tal bildar ett tvådimensionellt underrum till $\mathbb{P}_2$, rummet av alla polynom av grad högst två.

(e) Om A är en 3×3-matris sådan att $A^2 = I$, så gäller antingen $A = I$ eller $A = -I$.

(f) Om A är en 3×3-matris sådan att systemet $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-triviala lösningar, så är 2 ett egenvärde till A.

7. Definiera begreppen ortogonal matris och symmetrisk matris.

Låt A vara en $n \times n$ matris och betrakta följande egenskaper hos A:

(1) A är ortogonal,

(2) A är symmetrisk,

(3) $A^2 = I$.

Bevisa att två godtyckliga egenskaper ovan alltid medför den tredje.

Lycka till!
C-H F