MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 090824 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: David Witt-Nyström

0762-721861

TMA841 Linjär algebra V

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2009 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, därefter granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad **lossas och inlämnas som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Lös ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

(b) Skriv vektorn $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -6 \end{bmatrix}^T$ som linjärkombination av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} -5 & -8 & 9 \end{bmatrix}^T$. (2p)

(c) Är $\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -5 & -8 & 9 \end{bmatrix}^T\}$ en linjärt oberoende mängd av vektorer? Motivera ditt svar. (1p)

3. (a) Bestäm en ortonormerad egenvektorsbas till matrisen (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ange en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^T$.

(b) Förklara varför lösningarna till matrisens karakteristiska ekvatiion är matrisens egenvärden. (2p)

4. (a) Definiera begreppet *underrum* i $\mathbb{R}^n$ och avgör vilka av följande mängder av vektorer som är underrum i $\mathbb{R}^4$. (2p)

i. $\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\}$

ii. $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}$

iii. $\text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\}$

iv. $\{\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \end{bmatrix}^T : a, b \in \mathbb{R}\}$

(b) Bestäm en bas och dimension av det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$. (4p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt betyder spegling i planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Bestäm F:s matris i standardbasen. (6p)

6. Bevisa Cramers regel och utnyttja den för att bestämma lösningen till ekvationssystemet nedan, för de värden på parametern t sådana att regeln kan användas. Ange de t-värden som är tillämpliga. (6p)

$$\begin{cases} x_1 & + & tx_2 & + & t^2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & = & 1 \end{cases}$$

7. Punkterna $(t_1, x_1),\ (t_2, x_2),\ (t_3, x_3),\ (t_4, x_4)$ är givna. Förklara hur man kan bestämma parametrarna $a,\ b$ och c, så att $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}(at_i + bt_i^2 + ct_i^3 - x_i)^2$ är så liten som möjligt. (6p)

Bevisa att den metod du föreslår ger önskat resultat.

Lycka till!
Lyudmila T

Anonym kod	TMA841 Linjär algebra V 090824	sid.nummer	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna rangen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Ange dimensionen av Nul(A). (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Invertera matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm LU-faktoriseringen till matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 7 & -1 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

VÄND!

(d) Visa att $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. (3p)

Bestäm koordinaterna i standardbas för den vektor $\mathbf{u}$ vars koordinatvektor $\begin{bmatrix} \mathbf{u} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Bestäm koordinatvektorn $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T$

Lösning:

Svar: ....

(e) Visa att $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ i $\mathbb{R}^3$ är ortogonala. Bestäm sedan projektionen av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ på planet som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. (3p)

Lösning:

Svar: ....