MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa
Datum: 130313 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Christoffer Standar
0703-088304

TMV166/165 Linjär algebra M

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2013 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 13/3 eftermiddag. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differential-ekvationer (2p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = -10x_1(t) + 7x_2(t) \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

3. (a) Definiera vad som menas med *nollrummet* till en $m \times n$ matris A. (1p)

(b) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

och låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Bestäm vilken eller vilka av dessa tre vektorer som tillhör $\mathrm{Col}(A)$ respektive $\mathrm{Nul}(A)$.

(c) Bestäm en bas för $\mathrm{Col}(A)$ samt en bas för $\mathrm{Nul}(A)$. (3p)

4. Låt $a \in \mathbb{R}$ och betrakta följande fyra vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & a \end{bmatrix}^T.$$

(a) För vilket eller vilka $a \in \mathbb{R}$ är vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ linjärt beroende ? (3p)

(b) Bestäm en ortogonalbas för det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$. (3p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (6p)

(a) Om $AB\mathbf{x} = 0$ har icke-trivial lösning $\mathbf{x}$ så har $A\mathbf{x} = 0$ och $B\mathbf{x} = 0$ båda icke-trivial lösning. Med icke-trivial lösning $\mathbf{x}$ menas att $\mathbf{x} \neq 0$.

(b) Om A är diagonaliserbar så är $I - A^2$ diagonaliserbar, där I är enhetsmatrisen.

(c) Om A är en kvadratisk matris och $A^2 = 0$ så är $I - A$ en inverterbar matris.

6. (a) Visa att de tre polynomen $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t - 1$, $p_3(t) = (t-1)(t-2)$ bildar en bas för rummet av alla polynom av grad högst 2 ($\mathbb{P}_2$). Ange också koordinaterna för polynomet $t - t^2$ i basen $\{p_1, p_2, p_3\}$. (6p)

(b) Bestäm matrisen i den basen för den linjära avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ som ges av $T(p) = p''(t) - 2p'(t) + 2p(t)$.

7. (a) Hitta speglingen $\bar{\mathbf{x}}$ av vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ i planet genom origo som spänns upp av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. (6p)

(b) Visa att matrisen $H_{\mathbf{n}} = I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T$ är en ortogonalmatris om $\mathbf{n}$ är en normerad kolonnvektor i $\mathbb{R}^3$.

(c) Visa att om $H_{\mathbf{n}}$ är standardmatrisen för en linjär avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ så är $H_{\mathbf{n}}\mathbf{x}$ speglingen av $\mathbf{x}$ i planet genom origo med normalvektor $\mathbf{n}$.

Lycka till!

Anonym kod	TMV166/165 Linjär algebra M 130313	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Hitta LU-faktoriseringen av (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

utan att utföra några radbyten.

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna determinanten till matrisen A ovan. (2p)

(c) Beräkna inversen till matrisen (2p)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Svar: ....

(d) Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ där (2p)

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vara två baser för $\mathbb{R}^3$. Beräkna basbytesmatrisen $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. Använd eventuellt resultatet från föregående uppgift.

Lösning:

Svar: ....

(e) Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ och $T(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, där $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^2$. Bestäm matrisen för T i standardbas samt $T(3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(f) Bestäm minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMV166, Linjär Algebra M, 130313

1. (a)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\2&2&6&2\\0&2&3&1\\0&0&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&2&4&0\\0&2&3&1\\0&0&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&2&4&0\\0&0&-1&1\\0&0&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&2&4&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&4\end{bmatrix}=U.$$

Faktorn L fås av att ta de grå ”kolonnerna” i varje matris i relationerna ovan och var för sig dela dem med det översta elementet och sätta resultatet på motsvarande plats i L varvid

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-2&1\end{bmatrix}$$

erhålls.

(b) Eftersom radoperationerna utförda på A ovan inte förändrar determinanten så gäller att $\det(A)=\det(U)=1\cdot 2\cdot(-1)\cdot 4=-8$ då determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen.

Ett alternativt sätt att se detta är att beräkna $\det(A)=\det(LU)=\det(L)\det(U)=1\cdot(-8)$.

Utan någon av dessa insikter får man väsentligen räkna om föregående uppgift: man utför alltså radoperationerna

$$R_2\mapsto R_2-2R_1,\quad R_3\mapsto R_3-R_2,\quad R_4\mapsto R_4+2R_3$$

erhålls trappstegsformen

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&2&4&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&4\end{bmatrix}.$$

Determinanten i den senare är som nämnts $1\cdot 2\cdot(-1)\cdot 4=-8$ och ingen av radoperationerna ovan förändrar som sagt determinanten, så determinanten hos den ursprungliga matrisen är också -8.

(c) Radoperationerna

$$R_2\mapsto R_2-2R_1,\quad R_3\mapsto R_3+2R_1,\quad R_2\leftrightarrow R_3,$$
$$R_1\mapsto R_1-R_3,\quad R_2\mapsto R_2-R_3,\quad R_1\mapsto -R_1$$

förvandlar A till I_3. Då samma operationer utförs på I_3 erhåller man

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-3&1&0\\4&-1&1\\-2&1&0\end{bmatrix}.$$

(d) Låt $C=[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_3]$ och $B=[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]$. Notera att C är samma matris som i föregående uppgift. Alltså,

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}=C^{-1}B=\begin{bmatrix}-3&1&0\\4&-1&1\\-2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\\3&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3&-4\\5&-2&5\\0&2&-3\end{bmatrix}.$$

(e) Kalla matrisen för A. Det som är givet är att

$$A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}.$$

Detta medför att

$$A=AE=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}.$$

Sedan har vi att

$$T(3\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2)=A\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\5\end{bmatrix}=11\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2.$$

(f) Vi har

$$A^TA=\begin{bmatrix}6&3\\3&9\end{bmatrix},\quad A^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix},$$

så det normala systemet är

$$\left[\begin{array}{cc|c}6&3&1\\3&9&4\end{array}\right]\mapsto\left[\begin{array}{cc|c}6&3&1\\0&15&7\end{array}\right],$$

och följdaktligen är minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-1\\7\end{bmatrix}$.

2. (a) Vi beräknar

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-2-\lambda&2\\-10&7-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$. Egenvärdesekvationen $A\mathbf{x}=2\mathbf{x}$ är ekvivalent med $-4x_1+2x_2=0$, eller med $\mathbf{x}=x_1\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}^T$. På samma sätt ger $A\mathbf{x}=3\mathbf{x}$ egenvektorerna $\mathbf{x}=\frac{1}{2}x_1\begin{bmatrix}2&5\end{bmatrix}^T$.

Så vi har en diagonalisering $A=PDP^{-1}$, där

$$P=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}.$$

(b) Lösningen kan skrivas

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{2t}+c_2\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}e^{3t},\tag{1}$$

där

$$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=P^{-1}\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}.$$

Insättning i (1) ger

$$x_1(t)=3e^{2t}-2e^{3t},\quad x_2(t)=6e^{2t}-5e^{3t}.$$

3. (a) För en $m \times n$ matris A gäller att

$$\text{Nul}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

(b) Eftersom Nul(A) är ett underrum i $\mathbb{R}^5$ och Col(A) är ett underrum i $\mathbb{R}^4$ så kan vi direkt utesluta $\mathbf{v}_1$ som ett element i Col(A) och direkt utesluta $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ som element i Nul(A). Sedan för $\mathbf{v}_1$ kontrollerar man direkt att $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, så $\mathbf{v}_1$ tillhör Nul(A). För $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ ställer vi upp den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Då man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 + 2R_3$$

så erhålls trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Eftersom systemet är konsekvent för $\mathbf{v}_2$ men inte för $\mathbf{v}_3$ så drar vi slutsatsen att $\mathbf{v}_2$ tillhör Col(A) men inte $\mathbf{v}_3$.

(c) I trappstegsformen ovan har vi pivoter i 1:a, 2:a och 4:e kolumner. Motsvarande kolumner i A utgör alltså en bas för dess kolonnrum, dvs

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \text{ är en bas för Col}(A).$$

När det gäller nollrummet återstår bakåtsubstitution. Variablerna x_3 och x_5 är fria och vi får i tur och ordning

$$x_4 = -x_5, \quad x_2 = x_3 + 2x_5, \quad x_1 = -3x_3 - 5x_5.$$

En vektor i nollrummet skrivs i parametrisk vektorform som

$$x_3 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

som innebär att $\{[-3, 1, 1, 0, 0]^T, [-5, 2, 0, -1, 1]^T\}$ är en bas för Nul(A).

4. (a) Vi ställer upp en matris med dessa fyra vektorer som dess kolumner

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & a \end{bmatrix}.$$

Då man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto 8R_3 + 5R_2,$$
$$R_4 \mapsto 2R_4 - R_2, \quad R_4 \mapsto 5R_4 - 3R_3$$

erhålls trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & -8 & -15 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 10a - 110 \end{bmatrix}.$$

De fyra ursprungliga vektorerna är linjärt beroende om och endast om talet i nedre högre hornet är noll, dvs om och endast om $a = 11$.

(b) Det gäller att byta ut $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ mot en ortogonalbas $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ via en Gram-Schmidt process. Först tar vi $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$. Näst tar vi

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right)\mathbf{w}_1 = \cdots = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Slutligen tar vi

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\right)\mathbf{w}_1 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\right)\mathbf{w}_2 = \cdots = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Detta är FALSKT, t.ex. då A och B är $n \times n$ matriser sådan att A är inverterbar men inte B.

(b) Detta är SANT. Låt $A = PDP^{-1}$ vara en diagonalisering av A. Då gäller att $I - A^2 = P(I - D^2)P^{-1}$ är en diagonalisering av $I - A^2$, ty $I - D^2$ är också en diagonalmatris.

(c) Detta är SANT. Då $A^2 = 0$ gäller $(I - A)(I + A) = I - A^2 = I$, som innebär att $(I - A)^{-1} = I + A$.

6. (a) Låt $\mathcal{B} = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ och låt $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ vara standardbasen för $\mathbb{P}_2$. "Bas"bytematrisen kan man skriva upp direkt,

$$P = \underset{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denna matris är uppenbarligen inverterbar, som medför att $\mathcal{B}$ faktiskt ÄR en bas för $\mathbb{P}_2$. För att hitta koordinatvektorn för $t - t^2$ i denna bas måste vi lösa systemet vars utökade matris är

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Bakåtsubstitution ger lösningen $[0, -2, -1]^T$, som därmed är koordinatvektorn $[t - t^2]_{\mathcal{B}}$.

(b) Om vi först arbetar med standardbasen så har vi att

$$T(1) = 2, \quad T(t) = -2 + 2t, \quad T(t^2) = 2 - 4t + 2t^2,$$

som medför att

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Om vi sedan byter till basen $\mathcal{B}$ får vi att

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{E}}P = \cdots = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Kryssprodukten mellan $[1, 1, 0]^T$ och $[-1, 1, 1]^T$ är $[1, -1, 2]^T$, som är en normal $\mathbf{n}$ till planet. Sedan har vi formeln

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - 2\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\right)\mathbf{n} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

(b) Vi måste visa att $H^T H = I$. Observera först att

$$H^T = (I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T)^T = I^T - 2(\mathbf{n}\mathbf{n}^T)^T = I - 2(\mathbf{n}^T)^T\mathbf{n}^T = I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T = H,$$

så H är symetrisk. Att $\mathbf{n}$ är normerad betyder att $||\mathbf{n}||^2 = \mathbf{n}^T\mathbf{n} = 1$. Följdaktligen gäller att

$$\begin{aligned} H^T H = H^2 = (I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T)(I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T) = I - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^T + 4(\mathbf{n}\mathbf{n}^T)^2 = \\ = I - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^T + 4\mathbf{n}(\mathbf{n}^T\mathbf{n})\mathbf{n}^T = I - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^T + 4\mathbf{n}\mathbf{n}^T = I, \text{ v.s.v.} \end{aligned}$$

(c) Ekvation (2) ovan ger redan formeln för spegelbilden av $\mathbf{x}$. När $\mathbf{n}$ är normerad är $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ så (2) förenklas till

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{n}^T\mathbf{x})\mathbf{n} = \\ = I\mathbf{x} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}^T\mathbf{x}) = (I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T)\mathbf{x} = H_{\mathbf{n}}\mathbf{x}, \text{ v.s.v.} \end{aligned}$$