MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 140825 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Matteo Molteni
0703-088304

TMV186/185 Linjär algebra TD

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2014 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt $\mathcal{S}, \mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara de linjära avbildningarna som ges av

$$\mathcal{S}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathcal{S}(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3, \quad \mathcal{S}(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3,$$
$$\mathcal{T}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3, \quad \mathcal{T}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathcal{T}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

(a) Skriv upp matriserna för $\mathcal{S}$ och $\mathcal{T}$ i standardbas, samt bestäm $\mathcal{T}(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. (2p)

(b) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen, $\mathbf{y} = \mathcal{S}(\mathcal{T}(\mathbf{x}))$, i standardbas. (1.5p)

(c) Bestäm även matrisen för den inversa avbildningen $\mathcal{T}^{-1}$ i standardbas. (2.5p)

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Använd Cramers regel för att bestämma den unika lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (Obs! Inga poäng om du löser systemet på ett annat vis). (3p)

(b) Låt A' vara 3×2-matrisen bestående av de två första kolumnerna i A. Bestäm minstakvadratlösningen till $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (3p)

4. (a) Definiera vad som menas med en *diagonalisering* av en $n \times n$-matris A. (1p)

(b) Bestäm en diagonalisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} -11 & 7 \\ -14 & 10 \end{bmatrix}$. (3p)

(c) Bestäm $\mathbf{x}_{100}$ då $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{x}_n = A\,\mathbf{x}_{n-1}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (2p)
(Obs! Tal på formen a^{100} behöver inte räknas ut).

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Låt

$$p_1(t) = 2 + 3t + t^2, \quad p_2(t) = -1 + 2t - t^2, \quad p_3(t) = 1 + 4t^2, \quad p_4(t) = 1 + t + t^2.$$

(a) Bevisa att $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ är en bas för $\mathbb{P}_2$, vektorrummet av alla polynom av grad högst 2, samt bestäm koordinaterna för p_4 i denna bas. (4p)

(b) Låt $\mathcal{B}' = \{p_2, p_3, p_1\}$ och $P := \underset{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}{P}$. Bestäm P^{334}. (2p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (6p)

(a) Om U är en ortogonalmatris så är även U^2 det också.

(b) Om A och B är diagonaliserbara 2×2-matriser så är även $A + B$ det också.

(c) Om A är matrisen i standardbas för ortogonalprojektion på ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$, så är $\operatorname{rank}(A) = 1$.

7. (a) Om A är matrisen för spegling genom en linje genom origo i $\mathbb{R}^2$, förklara varför A kan skrivas $A = TBT^{-1}$ med $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ och lämplig matris T. (3p)

(b) Bevisa att om $A = TBT^{-1}$ så har A och B samma egenvärden. (3p)

Lycka till!

Anonym kod	TMV186/185 Linjär algebra TD 140825	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm a så att vektorerna är linjärt beroende. (2p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm baser för Col(A) samt Nul(A). (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt $\mathcal{P}$ vara planet genom origo i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av (2p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Verifiera att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala, och bestäm ortogonalprojektionen på $\sqsubseteq$ av vektorn $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Lösning:

Svar: ....

(d) Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ vara de baser för $\mathbb{R}^2$ som består resp. av (2p)

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Bestäm basbytematrisen $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$.

Lösning:

Svar: ....

(e) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lös matrisekvationen $AXB = XB + C$.

Lösning:

Svar: ....

(f) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & d \end{bmatrix}.$$

Ange d så att A har egenvärdet 1 och bestäm för detta d en egenvektor till egenvärdet 1.

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMV186/185 Linjär algebra TD 140825

1. (a)

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & a\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & a\\ 0 & 1 & 1-2a\\ 0 & 0 & -5+7a\end{bmatrix},$$

dvs $a = 5/7$.

(b)

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

dvs lösningen

$$x = \begin{bmatrix}-t\\ s-t\\ s\\ t\\ t\end{bmatrix}$$

dvs Nul(A) har basen

$$\left\{ \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\\1\end{bmatrix} \right\}$$

Basen till Col(A) är de kolumner ur A som motsvarar pivotelement i den reducerade matrisen, dvs

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\3\\0\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$$

(c)

$$1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 = 0$$

dvs ortogonala. Ortogonalprojektionen blir därmed

$$\frac{1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 1\cdot 2}{1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 2\cdot 2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix} + \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0}{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}4\\2\\3\\2\end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix}7 & 8 & 2 & 7\\ 6 & 7 & 3 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -10 & 9\\ 0 & 1 & 9 & -7\end{bmatrix},$$

dvs basbytesmatrisen blir

$$\begin{bmatrix}-10 & 9\\ 9 & -7\end{bmatrix}$$

(e)

$$X = (A - I)^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

(f)

$$A - I = \begin{bmatrix} 0.3 - 1 & 0.8 \\ 0.7 & d - 1 \end{bmatrix}$$

varur $\det(A - I) = 0$ ger $d = 0.2$ och egenvektor $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}^T$.

2. (a)

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$M_{ST} = M_S M_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(c)

$$M_{T^{-1}} = (M_T)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_{T^{-1}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 9, \quad (-2 * K1 + K2 \to K2, \text{ utv första rad}) \\
\det A_1(\mathbf{b}) &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad -R1 + R2 \to R2, \text{ utv första kolonn} \\
\det A_2(\mathbf{b}) &= -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad -R1 + R2 \to R2, \text{ utv andra kolonn} \\
\det A_3(\mathbf{b}) &= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad -R1 + R2 \to R2, \text{ utv tredje kolonn}
\end{aligned}$$

$x_1 = -1/9,\ x_2 = 5/9,\ x_3 = 3/9 = 1/3.$

(b)

$$A'^T * A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad A'^T * b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$x_1 = 0,\ x_2 = 1/2.$

4. (a) $A = PDP^{-1}$ där D är diagonalmatris.

(b)

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -11-\lambda & 7 \\ -14 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 12) = (\lambda+4)(\lambda-3),$$

som innebär att egenvärdena är $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$.
Egenvektorerna:

$$\begin{aligned} A + 4I_3 &= \begin{bmatrix} -7 & 7 \\ -14 & 14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \\ A - 3I_3 &= \begin{bmatrix} -14 & 7 \\ -14 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Diagonalisering:

$$A = PDP^{-1}, \ D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$x_{100} = A^{100}x_0 = PD^{100}P^{-1}x_0 = PD^{100}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3^{100} + 2\cdot 4^{100} \\ -2\cdot 3^{100} + 2\cdot 4^{100} \end{bmatrix}$$

5. (a)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 23 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$(-2*R3 + R1 \to R1, -5*R1 + R2 \to R2)$ så att $[p_4]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 9/23 & -2/23 & 3/23 \end{bmatrix}^T$. Vi ser också att tre första kolonner linjärt oberoende.

(b) T. ex. $[p_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ så

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har $P^3 = I_3$ så $P^{334} = P^{3\cdot 111}P = P$.

6. (a) Sant. $(UU)^T(UU) = U^TU^TUU = U^TIU = U^TU = I$.

(b) Falskt. Exempel: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonal och $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar (två olika egenvärden), men $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är inte diagonaliserbar (har bara egenvektorerna $[t, 0]^T$).

(c) Falskt. Låt tex planet spännas upp av de ortogonala vektorerna $[1, 0, 0]$ och $[0, 1, 0]$. Projektion av vektorn $[a, b, c]$ blir då $a[1, 0, 0] + b[0, 1, 0] = [a, b, 0]$, dvs $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och A har rang 2 (två pivotelement).

7. (a) Låt B vara en bas med första basvektorn parallell med linjen och den andra basvektorn ortogonal mot linjen. I denna bas motsvaras spegling i linjen av matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Om P är basbytesmatrisen från standardbasen till B så är alltså $A = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}P$.

(b) A och B har samma karakteristiska polynom och därmed samma egenvärden. Se Theorem 5.2.4 i Lay.

Liten ordlista över linjär algebra. Se också Glossary i kursboken där kortfattad förklaring av termerna ges.

Engelskt ord	**Svenskt ord**
adjoint, adjugate	adjunkt, adjungerad matris
algorithm	algoritm, räkneschema
angle	vinkel
augmented matrix	totalmatris, utvidgad matris
auxiliary (equation)	hjälp(ekvation), ibl. karakteristisk ekvation
backward (phase)	bakåt (fas)
basic variable	bunden (ofri) variabel, basvariabel,
basis	bas
belongs to	tillhör
change of basis	basbyte
collinear (vectors)	parallella (vektorer)
column	kolonn
column space	kolonnrum
composition of linear transformations	sammansatt linjär avbildning
condition	villkor
condition number	konditionstal
consistent system	lösbart system
constraint	restriktion, villkor
dimension	dimension
distinct	distinkta, olika
domain	definitionsmängd
dot product	skalärprodukt
echelon (matrix)	trappstegs(matris)
eigenvalue, eigenvector	egenvärde, egenvektor
equivalent	ekvivalent, likvärdig
finite (dimensional)	ändligt (dimensionell)
forward (phase)	framåt (fas)
general solution	allmän lösning
homogeneous equation	homogen ekvation
identity matrix	enhets matris, identitets matris
if and only if	om och endast om
image	bild
inconsistent (system)	olösbart (system)
inner product	skalärprodukt
inverse, invertible	invers, inverterbar
kernel	kärna, nollrum
least-square (method)	minsta-kvadrat(-metoden)

linear combination	linjär kombination
linearly (in)dependent	linjärt (o)beroende
linear span	linjärt hölje
lower triangular	undre triangulär
mapping	avbildning, transformation
necessary (condition)	nödvändigt (villkor)
nonsingular (matrix)	inverterbar (matris), icke-singulär
nontrivial (solution)	icke-trivial (lösning)
null space	nollrum
one-to-one	injektiv (ev. en-entydig)
onto	surjektiv, på
orthonormal	ortonormerad
overdetermined system	överbestämt system
range	värdemängd
rank	rang
reduced echelon matrix	radkanonisk matris, reducerad trappstegsmatris
row space	radrum
satisfy	satisfiera, uppfylla
set	mängd
singular	icke-inverterbar, singulär
solution	lösning
solution set	lösningsmängd
span, linear span	(linjärt) hölje
spanning set	mängd som spänner upp, uppspännande mängd
submatrix	undermatris
subspace	underrum, delrum
sufficient condition	tillräckligt villkor
trace	spår
transfer matrix	överföringsmatris
transformation	transformation, avbildning
transpose	transponat
underdetermined system	underbestämt system
unique	entydigt bestämd
unit vector	enhetsvektor
upper triangular	övre triangulär
vector space	vektorrum, linjärt rum
weight	vikt
zero(vector)	noll(vektor)