MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa
Datum: 150824 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Timo Hirscher
0703-088304

TMV166 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från kryssuppgifter 2015 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Bestäm lösningen till följande begynnelsevärdesproblem (4p)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 7x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(0) = -4, \quad x_2(0) = 3 \end{cases}$$

(b) Skissa fasporträttet till dynamiska systemet. (1p)

(c) Är origo en stabil nod, en instabil nod eller en sadelpunkt? (1p)

Lösning: Dynamiska systemet kan omskrivas som $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, då $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ och

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen A har egenvärden $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$ och egenvektorer $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Det följer att

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

är allmänna lösningen till dynamiska systemet. Begynnelsevilkoren $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -4 & 3 \end{bmatrix}^T$ ger $c_1 = -3, c_2 = 7$. Origo är en instabil nod. Fasporträttet består av en familj av curvor som utgår från origo.

3. Låt

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 13 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$$

(a) Beräkna avståndet mellan $\mathbf{y}$ och $W = \text{span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ (3p)

(b) Bestäm en ortogonal bas för $W^{\perp}$ (3p)

Lösning: Avståndet mellan $\mathbf{y}$ och W ges av $\|\mathbf{y} - \text{proj}_W \mathbf{y}\|$, då $\text{proj}_W \mathbf{y}$ är projektionen av $\mathbf{y}$ på W. Därför att $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ är ortgonala har vi

$$\text{proj}_W \mathbf{y} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|^2} \mathbf{v_1} + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|^2} \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Det följer att $\|\mathbf{y} - \text{proj}_W \mathbf{y}\| = 8$.

En ortogonal bas för $W^\perp$ är en par av vektor $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}$ som är linjärt oberoende och ortogonala mot W och med varandra. Vi kan välja

$$\mathbf{y_1} = \frac{1}{4}(\mathbf{y} - \mathrm{proj}_W \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

För att bestämma $\mathbf{y_2} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^T$ kan vi t. ex. lösa det linjära ekvationsystemet

$$\mathbf{y_2} \cdot \mathbf{y_1} = 0, \quad \mathbf{y_2} \cdot \mathbf{v_1} = 0, \quad \mathbf{y_2} \cdot \mathbf{v_2} = 0,$$

d.v.s.

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ a - 2b - c + 2d &= 0 \\ -4a + b + 3d &= 0. \end{aligned}$$

En lösning ges av $\mathbf{y_2} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -13 & 1 \end{bmatrix}^T$.

4. Bestäm alla vektorer som tillhör både nollrummet och kolonnrummet till matrisen (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösning: Vi först letar efter en bas för $\mathrm{Nul}(A)$, d.v.s., vektorrummet som består av lösningarna till $A\mathbf{x} = 0$. Totalmatrisen till detta system uppfyller

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det följer att $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ utgör en bas för $\mathrm{Nul}(A)$. Eftersom $\dim \mathrm{Nul}(A) = 2$ då, enligt ranksatsen, $\mathrm{Rank}(A) = 2$, d.v.s., matrisen A har två linjärt oberoende kolonner. Naturligtvis är de tredje och fjärde kolonnerna linjärt oberoende, därmed $\mathbf{y_1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{y_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ utgör en bas för $\mathrm{Col}(A)$. En vektor $\mathbf{w}$ tillhör både nollrummet och kolonnrummet om

$$\mathbf{w} = a\mathbf{v_1} + b\mathbf{v_2} = c\mathbf{y_1} + d\mathbf{y_2},$$

för några reella tal a, b, c, d. Den senare likhet är ekvivalent med det linjära ekvationsystemet

$$\begin{aligned} -3a + 4b + 3c - 2d &= 0 \\ 3a - 3b + d &= 0 \\ a + 3c - d &= 0 \\ b + 3c &= 0 \end{aligned}$$

vars lösningar ges av

$$a = -3t, \quad b = -3t, \quad c = t, \quad d = 0$$

då t är ett godtyckligt rellt tal. Därmed har vektorerna $\mathbf{w} \in \mathrm{Nul}(A) \cap \mathrm{Col}(A)$ formen $\mathbf{w} = t\mathbf{y_1}$.

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (12p)

(a) Om $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ är en bas för $\mathbb{R}^2$ så är $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}\}$ också en bas

(b) För alla $n \times n$ matriser A, B gäller $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

(c) Låt $\mathbb{P}_n$ vara vektorrummet av alla reella polynomer $p(x)$ med gradtalet mindre eller lika med n. Delmängden $W \subset \mathbb{P}_n$ av polynomer som uppfyller $p(1) = p(2)$ är ett underrum i $\mathbb{P}_n$

(d) En icke-noll vektor kan inte vara egenvektor för två olika egenvärden till en matris A

(e) Om kolonnvektorerna till en $n \times n$ matris är ortogonala då är radvektorerna också ortogonala

(f) Ett linjärt ekvationssytem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har alltid en minstkvadrat lösning

Lösning:

(a) SANT: Om $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ är linjärt oberoende då är $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ också linjärt oberoende

(b) FALSKT: $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 + BA - AB$ och i allmänhet $BA \neq AB$

(c) SANT: Den linjära kombinationen $r(x) = ap(x) + bq(x)$ av två polynomer $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_n$ som upfyller $p(1) = p(2)$, $q(1) = q(2)$ också uppfyller $r(1) = r(2)$

(d) SANT: Om $A\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{v}$ och $\mathbf{v}$ inte är noll då måste $\lambda_1 = \lambda_2$

(e) SANT: Kolonnvektorerna till en $n \times n$ matris A är ortogonala om och endast om $A^TA = D$ är diagonal. Radvektorerna till A är kolonvektorerna till $B = A^T$ och $B^TB = (A^T)^TA^T = AA^T = (A^TA)^T = D^T$, som också är diagonal

(f) SANT: Enligt definitionen är minstkvadrat lösningarna till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lika med lösningarna till $A\mathbf{x} = \text{proj}_W\mathbf{b}$, då $W = \text{Col}(A)$. Den senare ekvation har alltid en lösning eftersom högra leden $\text{proj}_W\mathbf{b}$ tillhör kolonnrummet till A

6. Vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i rummet $\mathbb{R}^3$ spänner upp en parallellepiped med volymen V. Bestäm volymen av den parallellepiped spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $3\mathbf{v} + \mathbf{w}$ och $\mathbf{w} + 2\mathbf{u}$. (3p)

Lösning: Först observerar vi att $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ måste vara en bas för $\mathbb{R}^3$ om dessa tre vektorer spänner upp en parallellepiped. Den linjära avbildningen som transformerar $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ till $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $3\mathbf{v} + \mathbf{w}$ och $\mathbf{w} + 2\mathbf{u}$ är lika med $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ då, i basen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eftersom $\det(A) = 5$ då är volymen till den nya parallellepiped lika med $5V$.

7. Låt $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ vara en kvadratisk form i $\mathbb{R}^3$. Bevisa olikheten (3p)

$$\lambda_{min}\|\mathbf{x}\|^2 \leq Q(\mathbf{x}) \leq \lambda_{max}\|\mathbf{x}\|^2, \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

då λ_{min} är det minst och λ_{max} det störst av egenverdena till A.

Lösning: Eftersom A är symmetrisk finns det en ortogonal matris P så att $A = PDP^T$, då D är matrisen av egenvärdena till A, som vi betecknar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Därmed

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TPDP^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^TD\mathbf{y},$$

då $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x}$. Låt $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$. Vi har $\mathbf{y}^TD\mathbf{y} = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2 \leq \lambda_{max}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = \lambda_{max}\|\mathbf{y}\|^2$. På samma sätt, $\mathbf{y}^TD\mathbf{y} \geq \lambda_{min}\|\mathbf{y}\|^2$. Dessutom $\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}P^TP\mathbf{x}^T = \mathbf{x}\mathbf{x}^T = \|\mathbf{x}\|^2$, då använde vi att $P^TP = I$.

Anonym kod	TMV166 Linjär algebra 150824	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) För vilka $a, b \in \mathbb{R}$ har ekvationsystemet (2p)

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ 3x + 5y + az &= b \end{aligned}$$

ingen, unik, respektive oändligt många lösningar?

Lösning:

Totalmatrisen till ekvationsystemet uppfyller

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & a-10 & b-19 \end{bmatrix}$$

Alltså för $a = 10$, $b = 19$ har systemet oändligt många lösningar, för $a = 10$, $b \neq 19$ ingen lösning och i övriga fall en unik lösning.

(b) Beräkna determinanten av matrisen A: (2p)

$$A = B^2 C^{-1}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 0 & 0 \\ -27 & 21 & 1 & 0 \\ -3 & 16 & -10 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -21 & -17 & -3 \\ 0 & -6 & 61 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

$$\det(A) = \det(B^2 C^{-1}) = \det(B)^2 \det(C)^{-1} = 6^2/(-12) = -3.$$

(c) Låt $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Ange en vektor i ortogonala komplementet till $W = \operatorname{span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$. (2p)

Lösning:

$y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T \in W^\perp$ om och endast om $\mathbf{y} \cdot \mathbf{v_1} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{v_2} = 0$. Detta är ekvivalent med

$$y_1 - 2y_3 = 0, \quad y_1 - y_2 + 2y_3 = 0.$$

En lösning ges t. ex. av vektorn $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Var god vänd!

(d) Bestäm en matris A så att $(AB)^T = B^{-1}$ då (2p)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

$$(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} \Leftrightarrow A^T = (B^T)^{-1} B^{-1} = B^{-1} B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = A.$$

(e) Bestäm a, b, c, d positiva reella tal sådana att vektorerna $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2/7 & -6/7 & a \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -b & 2/7 & 6/7 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 6/7 & c & d \end{bmatrix}^T$ utgör en ortonormal bas för $\mathbb{R}^3$ (3p)

Lösning:
För att $\|\mathbf{v_1}\| = \|\mathbf{v_2}\| = 1$ stämma måste vara $a = b = 3/7$. Eftersom $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2/7 & -6/7 & 3/7 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -3/7 & 2/7 & 6/7 \end{bmatrix}^T$ är ortogonala återstår det att välja $c, d > 0$ så att $\|\mathbf{v_3}\| = 1$ och $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_3} = \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_3} = 0$. De senare två ekvationerna ger $c = 3/7$ och $d = 2/7$. Därmed är

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2/7 & -6/7 & 3/7 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -3/7 & 2/7 & 6/7 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 6/7 & 3/7 & 2/7 \end{bmatrix}^T$$

(f) Bestäm en matris X med egenvärden $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ och motsvarande egenvektorer $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. (3p)

Lösning:

$$X = PDP^{-1},$$

då

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

är en matris av egenvektorer och

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

är matrisen av egenvärdena. På detta vis får vi

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Liten ordlista över linjär algebra. Se också Glossary i kursboken där kortfattad förklaring av termerna ges.

Engelskt ord	**Svenskt ord**
adjoint, adjugate	adjunkt, adjungerad matris
algorithm	algoritm, räkneschema
angle	vinkel
augmented matrix	totalmatris, utvidgad matris
auxiliary (equation)	hjälp(ekvation), ibl. karakteristisk ekvation
backward (phase)	bakåt (fas)
basic variable	bunden (ofri) variabel, basvariabel,
basis	bas
belongs to	tillhör
change of basis	basbyte
collinear (vectors)	parallella (vektorer)
column	kolonn
column space	kolonnrum
composition of linear transformations	sammansatt linjär avbildning
condition	villkor
condition number	konditionstal
consistent system	lösbart system
constraint	restriktion, villkor
dimension	dimension
distinct	distinkta, olika
domain	definitionsmängd
dot product	skalärprodukt
echelon (matrix)	trappstegs(matris)
eigenvalue, eigenvector	egenvärde, egenvektor
equivalent	ekvivalent, likvärdig
finite (dimensional)	ändligt (dimensionell)
forward (phase)	framåt (fas)
general solution	allmän lösning
homogeneous equation	homogen ekvation
identity matrix	enhets matris, identitets matris
if and only if	om och endast om
image	bild
inconsistent (system)	olösbart (system)
inner product	skalärprodukt
inverse, invertible	invers, inverterbar
kernel	kärna, nollrum
least-square (method)	minsta-kvadrat(-metoden)

linear combination	linjär kombination
linearly (in)dependent	linjärt (o)beroende
linear span	linjärt hölje
lower triangular	undre triangulär
mapping	avbildning, transformation
necessary (condition)	nödvändigt (villkor)
nonsingular (matrix)	inverterbar (matris), icke-singulär
nontrivial (solution)	icke-trivial (lösning)
null space	nollrum
one-to-one	injektiv (ev. en-entydig)
onto	surjektiv, på
orthonormal	ortonormerad
overdetermined system	överbestämt system
range	värdemängd
rank	rang
reduced echelon matrix	radkanonisk matris, reducerad trappstegsmatris
row space	radrum
satisfy	satisfiera, uppfylla
set	mängd
singular	icke-inverterbar, singulär
solution	lösning
solution set	lösningsmängd
span, linear span	(linjärt) hölje
spanning set	mängd som spänner upp, uppspännande mängd
submatrix	undermatris
subspace	underrum, delrum
sufficient condition	tillräckligt villkor
trace	spår
transfer matrix	överföringsmatris
transformation	transformation, avbildning
transpose	transponat
underdetermined system	underbestämt system
unique	entydigt bestämd
unit vector	enhetsvektor
upper triangular	övre triangulär
vector space	vektorrum, linjärt rum
weight	vikt
zero(vector)	noll(vektor)