MATEMATIK **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2006-01-13 kl. 08.30–12.30

Lösning till tentamen Linjär Algebra E/M/TD/Z

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

---

1 Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Vad är determinanten för matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$? (2p)

Svar: -12

(b) Matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ har egenvärdet 1. Ange en motsvarande egenvektor. (2p)

Svar: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$

(c) Avgör vilken/vilka av matriserna som är inverterbara:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (3p)

Svar: B och C är inverterbara, inte A.

(d) A är matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 9 & -1 & 7 & 1 \\ -2 & -6 & 0 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Matlab-komandot `>> B = rref(A)` ger resultatet

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ange rangen för A samt en bas för *nollrummet* till A.

Svar: Rank(A) = 3, bas för Nul(A) är $\{\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\}$

(e) Ange inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

Svar: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(f) En linjär avbildning $\boldsymbol{F}$ från $\boldsymbol{R}^3$ till $\boldsymbol{R}^2$ avbildar $[1, 0, 0]^T$ på $[2, 3]^T$, $[0, 1, 0]^T$ på $[0, 1]^T$ och $[0, 0, 1]^T$ på $[2, -1]^T$. Ange avbildningsmatrisen för $\boldsymbol{F}$. (2p)

Svar: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2 (a) Lös, enligt metoden med utökad matris, ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

Lösning: Utökade matrisen $\left[\, A \mid \boldsymbol{b} \,\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right] \sim$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{array}\right]$

Svar: $x_1 = 9/2,\ x_2 = 7/2,\ x_3 = -5/2$

(b) Bestäm x_1 med hjälp av Cramers regel. (3p)

Lösning: $x_1 = D_1/D$ där $D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 9$ och $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2$

Svar: $x_1 = 9/2$

3 Låt matrisen $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till A. (3p)

Lösning: Egenvärden är lösningar till karakteristiska ekvationen: $\det(A - \lambda I) = 0$.

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 50$. Egenvärden 5 och 10.

Egenvektorer är icketriviala lösningar till $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$

$A\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_2 = -2x_1$, Egenvektorer $t\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$, $t \neq 0$.

$A\boldsymbol{x} = 10\boldsymbol{x} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 &= 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_1 = 2x_2$, Egenvektorer $t\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $t \neq 0$.

Svar: Egenvärde 5, egenvektor $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$

Egenvärde 10, egenvektor $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

(b) Bestäm en formel för A^k. (3p)

Lösning: $A^k = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}^k \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\left(5^k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 10^k\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{5}\left(5^k\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 10^k\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Svar: $A^k = \frac{1}{5}\left(5^k\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 10^k\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$

4 Beräkna (med minsta kvadratmetoden) en approximativ lösning till ekvationssystemet (6p)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 6 \end{cases}$$

Beräkna också medelfelet.

OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata, så är medelfelet $\epsilon = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| / \sqrt{n}$

Lösning: Minsta-kvadratmetodens lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ är lösningen till $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$.

Minsta-kvadratmetodens lösning till $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ är alltså lösningen till

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Förenkling ger $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ vars lösning är

$x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 2$.

Denna lösning ger $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ \frac{20}{3} \end{bmatrix}$

Medelfelet $\epsilon = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| / \sqrt{n} == \left\| \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - 2 \\ -\frac{8}{3} + 4 \\ \frac{20}{3} - 6 \end{bmatrix} \right\| / \sqrt{3} = 2/\sqrt{3}$

Svar: $x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = 2$ medelfel $\epsilon = 2/\sqrt{3}$.

5 Med $\mathbb{P}_3$ menas det linjära rummet vars element är reella polynom av grad högst 3. Avbildningen $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ definieras av $T(p(t)) = p''(t) + p(t)$ (6p)

(a) Bestäm avbildningsmatrisen med avseende på den naturliga basen $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$.
Lösning: $M_{\mathcal{E}} = \left[\ [\ T(\boldsymbol{e}_1)\ ]_{\mathcal{E}}\ \ [\ T(\boldsymbol{e}_2)\ ]_{\mathcal{E}}\ \ [\ T(\boldsymbol{e}_3)\ ]_{\mathcal{E}}\ \ [\ T(\boldsymbol{e}_4)\ ]_{\mathcal{E}}\ \right]$.
$T(\boldsymbol{e}_1) = T(1) = 1 = \boldsymbol{e}_1$, $T(\boldsymbol{e}_2) = T(t) = t = \boldsymbol{e}_2$, $T(\boldsymbol{e}_3) = T(t^2) = 2 + t^2 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$,
$T(\boldsymbol{e}_4) = T(t^3) = 6t + t^3 = 6\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_4$,

Svar: $M_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Bestäm avbildningsmatrisen med avseende på basen $\mathcal{B} = \{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, t^3\}$.
Lösning: $T(\boldsymbol{b}_1) = T(1 + t) = 1 + t = \boldsymbol{b}_1$, $T(\boldsymbol{b}_2) = T(t + t^2) = 2 + t + t^2 = 2 + \boldsymbol{b}_2$,
$T(\boldsymbol{b}_3) = T(t^2 + t^3) = 2 + 6t + t^2 + t^3 = 2 + 6t + \boldsymbol{b}_3$, $T(\boldsymbol{b}_4) = T(t^3) = 6t + t^3 = 6t + \boldsymbol{b}_4$.

För att uttrycka $T(\boldsymbol{b}_i)$ i basen $\mathcal{B}$ behöver man nu kunna uttrycka 1 och t i denna bas.
Man kan då använda basbytesmatrisen ${}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{\ P}$ vars kolonner är $[\ \boldsymbol{b}_i\ ]_{\mathcal{E}}$.

$$\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Då är $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P} = \left(\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Här kan man läsa av att $1 = \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_4$ och $t = \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4$.
Då är $T(\boldsymbol{b}_2) = 2 + \boldsymbol{b}_2 = 2(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_4) + \boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3 - 2\boldsymbol{b}_4$,
$T(\boldsymbol{b}_3) = 2 + 6t + \boldsymbol{b}_3 = 2(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_4) + 6(\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4) + \boldsymbol{b}_3 = 2\boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2 - 3\boldsymbol{b}_3 + 4\boldsymbol{b}_4$
och
$T(\boldsymbol{b}_4) = 6t + \boldsymbol{b}_4 = 6(\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4) + \boldsymbol{b}_4 = 6\boldsymbol{b}_2 - 6\boldsymbol{b}_3 + 7\boldsymbol{b}_4$

Svar: $M_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

(c) Ange sambandet mellan de två avbildningsmatriserna med hjälp av transformationsmatrisen för basbytet $(\mathcal{B} \to \mathcal{E})$.
Med hjälp av basbytesmatriserna ovan har vi att

$M_{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P} M_{\mathcal{E}} \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$.

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} M_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Beräkning av matrisprodukten ger $M_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Svar: $M_{\mathcal{B}} = P^{-1} M_{\mathcal{E}} P$ där $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6 Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Alla ekvationssystem med färre ekvationer än obekanta har parameterlösning.
Svar: Falsk

(b) Om A är en 5×3 - matris så är rangen för A högst 3.
Svar: Sann

(c) Om A är en kvadratisk matris med $\det A = 0$ så är $\lambda = 0$ ett egenvärde till A
Svar: Sann

(d) Om en matris A är diagonaliserbar så är A symmetrisk.
Svar: Falsk

(e) Om A är en $m \times n$ - matris och B en $m \times 1$ - matris så har ekvationssystemet $A^T AX = A^T B$ minst en lösning.
Svar: Sann

(f) Om A är en $m \times n$ - matris och B en $m \times 1$ - matris så har ekvationssystemet $A^T AX = A^T B$ högst en lösning.
Svar: Falsk

7 (a) Definiera vad som menas med att en mängd av vektorer i ett vektorrum är linjärt oberoende. (1p)

(b) Bevisa att varje mängd, bestående av n linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$, spänner upp $\mathbb{R}^n$. (4p)

(c) Definiera vad som menas med en bas för ett underrum av ett vektorrum. (1p)

/C-H F