MATEMATIK **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola — Datum: 2007-03-17 kl. 08.30–12.30

Tentamen — Telefonvakter:Elin Götmark, Jonatan Vasilis

tel. 0762-721860/0762-721861

Lösning till Linjär Algebra E1/M1/TD1/V1/Z1

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (06/07) webbsida 19/3. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a+1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & a+1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & a+1 \end{vmatrix}$. (2p)

Lösning:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a+1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & a+1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{vmatrix}.$$

Svar: $(a-1)(a-2)(a-3)$

(b) U är det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. (3p)

Avgör för vilket eller vilka värden på den reella konstanten a vektorn $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & a-4 & 5-a & 2 \end{bmatrix}^T$ tillhör underrummet U.

Lösning: $\mathbf{w}$ tillhör underrummet U om och endast om vektorekvationen $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 + x_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{w}$ har lösning.

Detta är ekvivalent med att totalmatrisen $\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 & \mathbf{w} \end{array}\right]$ inte har pivotposition i femte kolonnen.

Elementära radoperationer leder till trappmatris med pivotposition i kolonn 1, 2 och 4 samt i kolonn 5 om $a \neq 6$.

Svar: $\mathbf{w}$ tillhör underrummet U om och endast om $a = 6$.

(c) Ange dessutom en bas för underrummet U ovan. (2p)

Lösning: En bas för U ges av pivotkolonnerna till matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \end{bmatrix}$. Dessa framgår av kalkylerna i föregående uppgift.

Svar: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\}$ är en bas för U.

(d) Ange avbildningsmatrisen (i standardbas) för den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning: Avbildningsmatrisen till F i standardbas är

$A = \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) & F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$.

$F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Svar: Avbildningsmatrisen till F är $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

(e) Ange minstakvadratlösningen till ekvationsystemet (3p)

$$\begin{cases} x & & = & 0 \\ & y & = & 1 \\ x & + \; y & = & 10. \end{cases}$$

Lösning: Ekvationssystemet i matrisform är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Svar: $x = 3$, $y = 4$.

(f) Ange LU-faktoriseringen av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning: För att erhålla LU-faktorisering skall A överföras till trappform enbart genom operationen: addera multipel av en rad till en annan. Då man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 4R_2,$$

så erhålls trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \end{bmatrix}.$$

De motsatta operationerna som leder från U till A ger elementen i L. Vi kan då skriva ner L direkt.

Svar: $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \end{bmatrix}$

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. (a) Bestäm en matris P som diagonaliserar matrisen $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. (6p)

Ange också diagonalmatrisen D som uppfyller $P^{-1}MP = D$.

Lösning: Kolonnerna i matrisen P är egenvektorer till M. Egenvärdena till M är diagonalelementen 2, 3, och 4, eftersom M är en triangulär matris. Motsvarande egenvektorer är lösningarna till ekvationssystemen $(M - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (för respektive λ).

I tur och ordning ger detta egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan då välja $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$, och diagonalmatrisen ges av egenvärdena i motsvarande ordning.

Svar: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(b) Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definieras enligt (2p)

$$T(p(t)) = p''(t) + (t+1)p'(t) + 2p(t)$$

Visa att M är avbildningsmatrisen till T i standardbasen $\{1, t, t^2\}$. Bestäm en bas för $\mathbb{P}_2$ av egenvektorer till T.

Lösning: Transformationsmatrisens kolonner utgörs av koordinatvektorerna för bilderna av basvektorerna ($\mathcal{B}$ står för standardbasen):

$$\begin{bmatrix} [T(1)]_{\mathcal{B}} \ [T(t)]_{\mathcal{B}} \ [T(t^2)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2]_{\mathcal{B}} \ [1+3t]_{\mathcal{B}} \ [2+2t+4t^2]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = M.$$

En bas för $\mathbb{P}_2$ av egenvektorer till T representeras via koordinatavbildningen av en egenbas till matrisen M i uppgift (a). Om vi tar de egenvektorer $\{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \mathbf{v}_3\}$ vi valde där, så ser vi:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_{\mathcal{B}}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1+t]_{\mathcal{B}}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [2+2t+t^2]_{\mathcal{B}}.$$

Svar: En bas är $\{1, \ 1+t, \ 2+2t+t^2\}$.

3. Låt U vara ett underrum i $\mathbb{R}^4$ som definieras genom

$$U = \{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \text{ och } x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$$

(a) Ange en matris A så att $U = \operatorname{Nul} A$. Bestäm en bas för U. (2p)

Lösning: Underrummet U ges av lösningarna till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, vilket innebär att $U = \operatorname{Nul} A$.

Då $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ser vi att dessa lösningar kan skrivas:

$$\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$ vilket ger oss en bas för U.

Svar: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. En bas för U är

$$\{\mathbf{a_1}, \ \mathbf{a_2}\} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

(b) Bestäm en ON-bas för U. (2p)

Lösning: Vi ortogonaliserar enligt Gram-Schmidt.

Sätt $\mathbf{b_1} = \mathbf{a_1}$ och ta $\mathbf{b_2} = \mathbf{a_2} - \frac{\mathbf{a_2}\cdot\mathbf{b_1}}{\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{b_1}}\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Slutligen normerar vi basen.

Svar: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$.

(c) Skriv vektorn $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ med $\mathbf{w}_1 \in U$ och $\mathbf{w}_2 \in U^{\perp}$. Bestäm sedan avståndet från $\mathbf{w}$ till U. (2p)

Lösning: Vi har $\mathbf{w} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, där $\mathbf{w_1} = \mathrm{Proj}_U\,\mathbf{w}$ och $\mathbf{w_2} = \mathbf{w} - \mathbf{w_1}$. Med den ortogonala basen $\{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2\}$ i uppgift(b) får vi:

$\mathbf{w_1} = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{b_1}}{\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{b_1}}\mathbf{b_1} + \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{b_2}}{\mathbf{b_2}\cdot\mathbf{b_2}}\mathbf{b_2} = \frac{1}{2}\mathbf{b_1} + \frac{1}{2}\mathbf{b_2}$,

och avståndet från $\mathbf{w}$ till U blir $\|\mathbf{w_2}\|$.

Svar: $\mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Avståndet till U är $\sqrt{10}$.

4. Lös följande system av differentialekvationer (6p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1.$$

Lösning: Med beteckningarna $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ skriver vi systemet

$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Om vi kan hitta en egenbas $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\}$ till A för $\mathbb{R}^2$, och gör basbytet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, där $P = [\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2]$, så blir $\mathbf{x}' = P\mathbf{y}'$ och vårt system övergår i

$P\mathbf{y}' = AP\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' = P^{-1}AP\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' = D\mathbf{y}$

där $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ är diagonalmatrisen given av egenvärdena till respektive egenvektor. Vi löser detta system: $\mathbf{y} = C_1e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2e^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och översätter till ursprunglig bas:

$\mathbf{x} = P\mathbf{y} = C_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + C_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$.

Bestäm egenvärdena till A ur karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$, och respektive egenvektor ur systemet $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

A befinns ha egenvärdena $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -1$ och motsvarande egenvektorer

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Alltså är $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2e^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Sätt in begynnelsevillkoret och lös ut C_1 och C_2.

Svar: $\begin{cases} x_1(t) = \frac{3}{5}e^{4t} - \frac{3}{5}e^{-t} \\ x_2(t) = \frac{2}{5}e^{4t} + \frac{3}{5}e^{-t} \end{cases}$

5. Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ och basen $\mathcal{C}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. (4p)

Bestäm basbytesmatrisen (koordinatbytesmatrisen) $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$.

Lösning: Vi vill bestämma matrisen $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ i sambandet $\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$.
Om $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, så gäller för koordinatvektorerna i respektive bas:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Vi löser ut $\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}$ ur denna matrisekvation:

$$\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

och vår matris är funnen!

Svar: $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Spegling i linjen $y = x + 1$ är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.

Svar: Falskt

Motivering: Linjen går inte genom origo så speglingen avbildar ej nollvektorn på sig själv.

(b) Om A är en symmetrisk matris så är A diagonaliserbar.

Svar: Sant

Motivering: Theorem 2, p.451.

(c) Om A är en diagonaliserbar matris så är A symmetrisk.

Svar: Falskt

Motivering: Många icke-symmetriska matriser är också diagonaliserbara. Exempel finns i uppgifterna 2 och 5 på denna tenta.

(d) $U = \{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x_2\}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^2$.

Svar: Falskt

Motivering: U är inte sluten under skalärmultiplikation med ett negativt tal. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T \in U$ men $\begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}^T$ tillhör inte U.

(e) Om tre vektorer spänner upp $\mathbb{R}^3$ så är de linjärt oberoende.

Svar: Sant

Motivering: Att dimensionen av $\mathbf{R}^3$ är tre innebär att tre st. vektorer spänner upp rummet om och endast om de är linjärt oberoende. Se Theorem 12, p.259.

(f) Om A är en $n \times n$ matris och $(\operatorname{Col} A)^\perp = \{\mathbf{0}\}$ så är $\det A \neq 0$.

Svar: Sant

Motivering: Att ortogonalkomplementet till kolonnrummet enbart består av nollvektorn innebär att kolonnrumet är hela $\mathbf{R}^n$. Dvs matrisens kolonner spänner upp $\mathbf{R}^n$, och därmed är A inverterbar (Theorem 8(h), p.129). Att A är inverterbar innebär i sin tur att $\det(A) \neq 0$ (Theorem 4, p.194).

7. Låt A vara en $n \times n$ matris.

(a) Definiera begreppet: *A är en inverterbar matris.* (1p)

Svar: Det är definitionen i boken man bör ge: se p.119. En $n \times n$ matris A sägs vara *inverterbar* om det finns en $n \times n$ matris B s.a. $AB = BA = I_n$.

(b) Bevisa enbart med stöd av definitionen ovan: (2p)
om $A^2 + A = I_n$ så är A inverterbar.

Svar: $A^2 + A = I_n \Leftrightarrow A(A + I_n) = (A + I_n)A = I_n$ så $A + I_n$ är inversen till A, per definition av inversen ovan.

(c) Bevisa: om A är inverterbar så är inte noll ett egenvärde till A. (1p)

Svar: Om A är inverterbar så finns ingen vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Då finns heller ingen vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ så att $A\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$.

(d) Bevisa: om A har ortogonala kolonner och ingen kolonn är nollvektorn så är A inverterbar. (2p)

Svar: Om kolonnerna är ortogonala och skilda från noll så är de speciellt linjärt oberoende (Theorem 4, p.384). Men en kvadratisk matris vars kolonner är linjärt oberoende är inverterbar (Theorem 8(e), p.129).

Lycka till!
C-H F