MATEMATIK — **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola — Datum: 2009-01-15 kl. 08.30–12.30

Tentamen — Telefonvakt: Aron Lagerberg

tel. 0762-721860

Linjär Algebra M (tmv165/166)
Linjär Algebra TD (tmv185/186)

Skriv tentamenskod tydligt på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget och placeringslistan noggrannt och tydligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 07/08 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (07/08) webbsida senast 17/1. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Ange inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

(b) Ange en egenvektor som hör till egenvärdet 1 till matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. (2p)

(c) Ange ett tal h sådant att vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & h \end{bmatrix}^T$ är en linjärkombination av vektorererna $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ där (3p)

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

(d) En linjär avbildning $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har en egenvektor $\mathbf{e}_1$ med egenvärde 2 och avbildar vektorn $\mathbf{e}_2$ på $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Bestäm matrisen för A i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ och bilden av vektorn $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. (2p)

(e) Matriserna $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ och $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ är radekvivalenta. Ange rangen för A samt en bas för kolonnrummet för A. (2p)

(f) Ange LU-faktoriseringen av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen (7p)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Finns det en ON-bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till denna matris? Bestäm i så fall en sådan.

Var god vänd!

3. Låt M vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som ges av (6p)

$$M = \{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}.$$

(a) Bestäm en bas i M.

(b) Bestäm en ON-bas i M.

(c) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ på M.

4. (a) Antag att A är en 2×2-matris som har egenvektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ med egenvärdena 1 respektive -1. (2p)
Bestäm A^n för $n = 1, 2, \ldots$

(b) Med samma A som i (a) betraktar vi systemet av differentialekvationer (4p)
$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ med $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.
Bestäm $\mathbf{x}(t)$.
För full poäng skall du motivera din lösningsmetod väl.

5. Ange en ekvation för den linje som är bäst anpassad, i minstakvadratmetodens mening, till punkterna (4p)

$$(1,5), \quad (2,6), \quad (3,10), \quad (4,12), \quad (5,17).$$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om A och B är två kvadratiska matriser av samma typ och B är inverterbar så gäller att $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$.

(b) Om $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ spänner upp $\mathbb{R}^5$ så är de linjärt oberoende.

(c) Om A och B är 3×3-matriser och $AB = 0$ så gäller antingen $A = 0$ eller $B = 0$.

(d) Om A är en (5×5)-matris sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösningar för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$ så är matrisen A inverterbar.

(e) Om (5×5)-matrisen A har egenvärdena 1,2 och 3, och inga fler, så måste A vara inverterbar.

(f) Varje kvadratisk matris är diagonaliserbar.

7. (a) Definiera begreppet linjärt oberoende vektorer. (2p)

(b) Bevisa att om $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ är linjärt oberoende och $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}, \mathbf{b}\}$ är linjärt beroende så måste $\mathbf{b}$ vara en linjär kombination av $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$. (2p)

(c) Låt $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ vara parvis ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^n$, dvs $\mathbf{v_i} \cdot \mathbf{v_j} = 0$ då $i \neq j$. Bevisa att $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ är en bas i $\mathbb{R}^n$. (4p)

Lycka till
Carl-Henrik

Lösningar

1. (a) Notera att matrisen är en blockmatris och att $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Därför är

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, t.ex.

(c) Vi arbetar med den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & h \end{array}\right].$$

Då vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & h-3 \end{array}\right].$$

Därmed är systemet konsistent (dvs $\mathbf{v}$ ligger i Span$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$), om och endast om $h = 3$.

(d) Den givna informationen medför att matrisen för A i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ är

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi beräknar bilden av $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ via matrisprodukten

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Detta innebär att $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ avbildas på $5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.

(e) $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(U) = 2$. En bas för Col(A) utgörs av de kolonner motsvarande kolonnerna i U som innehåller pivoten, dvs kolonner 1 och 3. M.a.o. en bas för $\text{Col}(A)$ ges av

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(f) Man kan kolla att följden av radoperationer

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 4R_2$$

förvandlar A till trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Därmed är $A = LU$ där

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Kalla matrisen för M. Vi söker egenvärdena och egenvektorerna till M. Dess karakteristiska ekvation är

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

som efter beräkningen av determinanten (utförs t.ex. genom en kofaktor expansion längs första raden) blir

$$\lambda(\lambda-6)^2 = 0.$$

Därmed har vi en enkelrot $\lambda_1 = 0$ och en dubbelrot $\lambda_{2,3} = 6$.

$\lambda_1 = 0$: Vi har

$$M - 0I_3 = M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_{2,3} = 6$: Vi har

$$M - 6I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Eftersom M är symmetrisk vet vi att basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ av egenvektorer kan förvandlas till en ON-bas. Dessutom är $\mathbf{v}_1$ redan ortogonal mot både $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ så vi får en ortogonal bas genom att byta ut $\mathbf{v}_3$ mot

$$\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||^2}\right)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Det återstår att normalisera. En ON-bas bestående av egenvektorer ges därmed av $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ där

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3'}{||\mathbf{v}_3'||} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Nollrummet består av alla vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Så en bas för nollrummet utgörs av de två vektorerna ovan, som vi kallar för $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

(b) Vi får en ortogonal bas genom att byta ut $\mathbf{v}_2$ mot

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\right)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det återstår att normalisera. En ON-bas bestående för M ges därmed av $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ där

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{||\mathbf{v}_2'||} = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$\text{proj}_M \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (-5) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{7} \cdot (-1) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 41 \\ -32 \\ -32 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

4. För mer utförlig motivering, se avsnitt 5.6 och 5.7 i Lay. Det är givet att $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a)

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}^{-1} = \cdots = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 + 2 \cdot (-1)^n & 2 - 2 \cdot (-1)^n \\ 1 - (-1)^n & 2 + (-1)^n \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0) = Pe^{tD}P^{-1}\mathbf{x}(0)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \cdots = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^t + 2e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

5. (a) Kalla de fem givna punkterna för (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Vi söker linjen $y = kx + m$ sådan att $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} m & k \end{bmatrix}^T$ är minstakvadratlösningen till ekvationssystemet som i matrisform ges av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi beräknar

$$A^TA = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = 10 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Svar : $y = 3x + 1$.

6. (a) Sant. $\det(BAB^{-1}) = (\det B)(\det A)(\det B^{-1}) = (\det B)(\det A)\frac{1}{\det B} = \det A$.

(b) Sant, ty $\mathbb{R}^5$ har dimension 5.

(c) Falskt. T.ex. tag

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Sant. Kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^5$. Se nu (b).

(e) Sant, ty noll är inte ett egenvärde.

(f) Falskt, t.ex. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är inte det.

7. (a) En mängd vektorer $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ i ett vektorrum V sägs vara *linjärt oberoende* om ekvationen

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

har den entydiga lösningen $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

(b) Att den utökade mängden är linjärt oberoende innebär att det finns skalärer $c_1, ...c_{n+1}$, inte alla lika med noll, sådan att

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n + c_{n+1}\mathbf{b} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Men c_{n+1} måste vara skild från noll, för annars skulle vi ha en icke-trivial relation mellan $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ redan, som motsäger att dessa är linjärt Oberoende. Därmed kan vi dela med c_{n+1} i (1) och skriva om ekvationen till

$$\mathbf{b} = -\frac{c_1}{c_{n+1}}\mathbf{v}_1 - \cdots - \frac{c_n}{c_{n+1}}\mathbf{v}_n,$$

som uttrycker $\mathbf{b}$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$.

(c) Eftersom $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ så räcker det att visa att parvis ortogonala vektorer är linjärt oberoende. Antag att

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Vi måste visa att $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Välj ett $i \in \{1, ..., n\}$ och tag skalärprodukten av båda leden i (2) med $\mathbf{v}_i$. Då får vi pga ortogonalitet att

$$0 = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{n} c_j(\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_i) = c_i||\mathbf{v}_i||^2.$$

Eftersom $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ så måste $c_i = 0$. Eftersom i valdes godtyckligt så är vi klara.