MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 090314 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Martin Berglund

0762-721860

TMV166/165 Linjär algebra M TMV186/185 Linjär algebra TD

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2009 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Invertera matriserna (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Med hjälp av dessa inverser, lös matrisekvationen (3p)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$. (4p)

(b) Lös följande system av differentialekvationer med hjälp av (a): (2p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases} \qquad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.$$

4. (a) Definiera begreppen *bas* och *ortogonalbas* för ett underrum i $\mathbb{R}^n$. (2p)

(b) Låt $\mathcal{P}$ vara det plan genom origo i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T$. Bestäm en ON-bas för $\mathcal{P}$. (2p)

(c) Bestäm ortogonalprojektionen av vektorn $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 6 \end{bmatrix}^T$ på planet $\mathcal{P}$. (2p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Låt $p_1(x) = a + x - x^2$, $p_2(x) = -1 + x + ax^2$, $p_3(x) = a + 2x + 2x^2$ vara polynom i vektorrummet $\mathbb{P}_2$, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Visa att om $a = 1$ utgör p_1, p_2, p_3 en bas i $\mathbb{P}_2$. (2p)

(b) Ange alla $a \in \mathbb{R}$ sådana att polynomen p_1, p_2, p_3 inte är en bas i $\mathbb{P}_2$. (4p)

6. (a) Låt $T : V \to W$ vara en transformation (funktion) från vektorrummet V till vektorrummet W. Vilka egenskaper skall T ha för att kallas linjär? Ge ett exempel på en transformation från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som inte är linjär. (2p)

(b) Låt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning med standardmatrisen A. Ange en egenskap hos matrisen A som motsvarar att F är injektiv. Motivera ditt svar. (3p)

(c) Finns det någon injektiv linjär avbildning F från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^3$. Motivera Ditt svar. (1p)

7. Låt $A = [a_{ij}]$ vara en $n \times n$-matris. Med spåret av A, $\mathrm{tr}(A)$, betecknar man summan av alla diagonalelementen hos matrisen A, dvs $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

(a) Bevisa att om A och B är 3×3-matriser så är $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. (2p)

(b) Med hjälp av resultatet i (a) visa att om A är diagonaliserbar så är (4p)

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är egenvärdena till A.

Lycka till!
Carl-Henrik F

Anonym kod	**TMV166/165 Linjär algebra M TMV186/185 Linjär algebra TD** 090314

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Avgör om vektorerna i $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$, är linjärt beroende. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm koordinaterna i standardbasen för den vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ som i basen (3p)
$\mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T\}$
har koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$

Lösning:

Svar: ....

VÄND!

(d) Bestäm baser för kolonnrum och nollrum till matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Lös följande ekvationssystem med minstakvadrat-metoden. (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Lösningar

1. (a) Genom enbart additioner av radmultipler till rader kan man överföra matrisen till en triangulär matris, vars determinant är samma som för ursprungsmatrisen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}.$$

Determinanten av en sådan är produkten av diagonalelementen $= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-9) = -18$.
(Det finns många andra sätt att beräkna den!)
Svar: -18

(b) Kolonnvektorerna i matrisen i (a) är desamma som i denna uppgift. Om de är linjärt beroende så är determinanten för matrisen noll, vilket nu inte är fallet.
Svar: Nej, de är linjärt oberoende.

(c) Att $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ betyder att

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Svar: $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Härav ser vi att pivotkolonnerna i A är nr 1 och 2. Dessa utgör en bas för $\operatorname{Col} A$. $\operatorname{Nul} A$ är lösningarna till $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow U\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi löser systemet och får
$\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
vilket ger basvektorn till det endimensionella rummet $\operatorname{Nul} A$.
Svar: En bas för $\operatorname{Col} A$ **är** $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T\}$,
en bas för $\operatorname{Nul} A$ **är** $\{\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T\}$.

(e) Minstakvadratlösningen är lösning till normalekvationerna: $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$, dvs
$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ som har den entydiga lösningen $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
Svar: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

2. (a) A inverteras med formel: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
B inverteras med Jacobis metod: $\begin{bmatrix} A \mid I \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I \mid A^{-1} \end{bmatrix}$, i detalj blir det
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Härav ser vi att $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Kalla den okända matrisen för X och högerledet för C. Ekvationen lyder $AXB = C$ och därför är $X = A^{-1}CB^{-1}$. Enligt (a) har vi då

$$X = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 6 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Vi vill diagonalisera A. Dess karakteristiska ekvation är

$$(1-\lambda)(4-\lambda)+2=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0,$$

som har de två rötterna $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$. Vi söker egenvektorer till vardera egenvärdet.

$\lambda_1=2$: Vi har

$$A-2I_2=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man ser att en egenvektor är $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2=3$: Vi har

$$A-3I_2=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man ser att en egenvektor är $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Därmed har vi att $A=PDP^{-1}$ där

$$P=[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$
$$D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Systemet löses nu med hjälp av egenvektorer och egenvärden enligt följande:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}+C_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}=C_1e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}+C_1e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Begynnelsevillkoret ger slutligen $C_1=2$ $C_2=-3$ och

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{2t}-3e^{3t} \\ -2e^{2t}+3e^{3t} \end{bmatrix}$$

4. (a) Se Lay!

(b) Först behåller vi $\mathbf{v_1}$ och byter ut $\mathbf{v_2}$ mot $\mathbf{v_2}-\dfrac{\mathbf{v_2}\cdot\mathbf{v_1}}{\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_1}}\mathbf{v_1}=$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}-\dfrac{14}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ Sedan återstår normering till ON-bas:

$$\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Formeln för ortogonalprojektion med ON-bas ger:

$$(\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1+(\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2=\frac{28}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}+\left(\frac{-3}{3}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

5. Vi kan identifera $\mathbb{P}_2$ med $\mathbb{R}^3$ genom att identifiera polynomet $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ med kolonnvektorn $[a_0\ a_1\ a_2]^T$. Därmed kan vi ställa upp de 3 givna polynomen i en matris A som vi finner radekvivalent med en trappstegsmatris U:

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & a & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a+1 & 4 \\ 0 & 0 & 4-a \end{bmatrix} = U$$

Polynomen utgör en bas för $\mathbb{P}_2$ om och endast om kolonnerna i denna matris är linjärt oberoende. Detta inträffar precis då U har ett pivotelement i varje kolonn, dvs om a varken är -1 eller 4. Det är alltså bara för $a = -1$ och $a = 4$ som p_1, p_2, p_3 *inte* utgör en bas i $\mathbb{P}_2$. Vi har därmed löst både (a) och (b).

6. (a)
- $T(x + y) = T(x) + T(y)$ för varje $x \in V$ och varje $y \in V$.
- $T(cx) = cT(x)$ för varje $x \in V$ och varje $c \in \mathbb{R}$

Med $T(\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$ har vi ett exempel på en ickelinjär avbildning. T.ex. är $T\left(c\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = c^2 T(\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ i strid med andra punkten ovan.

(b) Att F är injektiv innebär att $T(x) = y$ kan ha högst en lösning för givet $y \in \mathbb{R}^m$, t ex $y = 0$. Om F har standardmatrisen A innebär detta att ekvationssystemet $Ax = 0$ har bara triviala lösningen. Detta inträffar exakt då alla kolonnerna i A är pivotkolonner (dvs då de är linjärt oberoende).

(c) Här är matrisen för F en 3×4-matris. I en sådan kan inte alla 4 kolonnerna vara pivotkolonner - 3 rader, högst 3 pivotelement! Enligt (b) kan alltså inte F vara injektiv.

7. (a) Skriv

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix}.$$

Räkna fram då att (kom ihåg att vi är bara intresserade av diagonalelementen i följande matriser)

$$AB = \begin{bmatrix} aj + bm + cp & \cdot & \cdot \\ \cdot & dk + en + fq & \cdot \\ \cdot & \cdot & gl + ho + ir \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} ja + kd + lg & \cdot & \cdot \\ \cdot & mb + ne + oh & \cdot \\ \cdot & \cdot & pc + qf + ri \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$\operatorname{tr}(AB) = (aj + bm + cp) + (dk + en + fq) + (gl + ho + ir),$$

och

$$\operatorname{tr}(BA) = (ja + kd + lg) + (mb + ne + oh) + (pc + qf + ri).$$

En närmare inspektion visar att dessa två uttryck är lika! Därmed är $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, VSB.

(b) Tag en diagonalisering av A med $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.
$A = PDP^{-1} \Rightarrow \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}((PD)P^{-1}) = \{\text{enligt}(a)\} = \operatorname{tr}(P^{-1}(PD)) = \operatorname{tr}((P^{-1}P)D) = \operatorname{tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$