**MATEMATIK** **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 090824 kl.
Tentamen Telefonvakt:

**Lösningsförslag till Linjär algebra E, M, TD, V**

---

## Del 1: Godkäntdelen

**1.** (a) Beräkna rangen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Ange dimensionen av $\mathrm{Nul}(A)$. (3p)

**Lösning:** $\mathrm{Rank}\, A = \mathrm{Rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 + \mathrm{Rank} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 +$
$\mathrm{Rank} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$. Alltså är $\dim \mathrm{Nul}\, A = 4 - 3 = 1$

**Svar:** $\mathrm{Rank}\, A = 3$, $\dim \mathrm{Nul}\, A = 1$

(b) Invertera matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (2p)

**Lösning:** $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$
$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$

**Svar:** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Bestäm $LU$-faktoriseringen till matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 7 & -1 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ (3p)

**Lösning:** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 7 & -1 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = U$

**Svar:** $U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(d) Visa att $\mathcal{B} = \{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. (3p)
Bestäm koordinaterna i standardbas för den vektor $\mathbf{u}$ vars koordinatvektor $\begin{bmatrix} \mathbf{u} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} =$ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Bestäm koordinatvektorn $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T$

**Lösning:** $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3\}$ är en bas om och endast om matrisen $P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$ har pivotposition i varje kolonn.

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}\, P_{\mathcal{B}} = 3. \text{ Alltså är } \mathcal{B} \text{ en bas.}$$

$$\mathbf{u} = P_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Koordinatvektorn $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ är lösning till ekvationen $P_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ med total-matris $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$ som ger $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$

**Svar:** $\text{Rank}\, P_{\mathcal{B}} = 3 \Rightarrow \mathcal{B}$ är en bas. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\quad \begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$

(e) Visa att $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ i $\mathbb{R}^3$ är ortogonala. Bestäm sedan projektionen av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ på planet som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. (3p)

**Lösning:** $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$. Alltså är $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ ortogonala. Därmed kan projektionsformeln tillämpas för beräkning av den ortogonala projektionen:

$$\mathbf{v}_{proj} = \frac{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{-2}{6}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Svar:** $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ ortogonala. $\mathbf{v}_{proj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

**2.** (a) Lös ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

**Lösning:** Systemets totalmatris överförs till reducerad trappform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Systemets lösning är:

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 4t \\ x_2 = 3 + 3t \\ x_3 = t \end{cases}$$

(b) Skriv vektorn $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -6 \end{bmatrix}^T$ som linjärkombination av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} -5 & -8 & 9 \end{bmatrix}^T$. (2p)

**Lösning:** Av lösningen ovan följer att

$$(-5-4t)\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}+(3+3t)\begin{bmatrix}3\\4\\-7\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-5\\-8\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\7\\-6\end{bmatrix} \text{ för alla värden på } t.$$

Med $t=0$ får man:

$$-5\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3\\4\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\7\\-6\end{bmatrix}.$$

(c) Är $\{\begin{bmatrix}1 & 1 & -3\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}3 & 4 & -7\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-5 & -8 & 9\end{bmatrix}^T\}$ en linjärt oberoende mängd av vektorer? Motivera ditt svar. (1p)

**Lösning:** Nej, i så fall skulle systemet i (a) haft entydig lösning.

**3.** (a) Bestäm en ortonormerad egenvektorsbas till matrisen (4p)

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}.$$

Ange en ortogonal matris $P$ och en diagonalmatris $D$ sådana att $A=PDP^T$.

**Lösning:** Matrisens egenvärden ges av lösningarna till den karakteristiska ekvationen:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\2 & 2\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda-1)=0.$$

Egenvärden: 6 och 1.

Egenvektorerna är lösningar till $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$

Egenvektor till egenvärdet 6: $A\mathbf{x}=6\mathbf{x}\Leftrightarrow -x_1+2x_2=0\Leftrightarrow \mathbf{x}=t\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\quad t\neq 0$

Egenvektor till egenvärdet 1: $A\mathbf{x}=1\mathbf{x}\Leftrightarrow 2x_1+x_2=0\Leftrightarrow \mathbf{x}=t\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix},\quad t\neq 0$

Normerade egenvektorer: $\mathbf{v_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ till egenvärdet 6 och

$\mathbf{v_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ till egenvärdet 1.

$\mathcal{B}=\{\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2}\}$ är en ortonormerad egenvektorsbas.

De sökta matriserna $P=\begin{bmatrix}\mathbf{v_1} & \mathbf{v_2}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}$ och $D=\begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

(b) Förklara varför lösningarna till matrisens karakteristiska ekvatiion är matrisens egenvärden. (2p)

**Lösning:** Se kursboken kapitel 5.2.

**4.** (a) Definiera begreppet *underrum* i $\mathbb{R}^n$ och avgör vilka av följande mängder av vektorer som är underrum i $\mathbb{R}^4$. (2p)

i. $\{\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\}$

ii. $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}$

iii. $\text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\}$

iv. $\{\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \end{bmatrix}^T : a, b \in \mathbb{R}\}$

**Lösning:** Se kursboken kapitel 2.8.

i. är ett underrum,

ii. är bas för $\mathbb{R}^4$, består av fyra vektorer och är inte ett underrum, nollvektorn $\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\}$ ingår inte, linjärkombinationer ingår inte.

iii. är ett underrum (se 2.8 exempel 3)

iv. är inte ett underrum $\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\}$ ingår inte, addition för utanför mängden.

(b) Bestäm en bas och dimension av det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$. (4p)

**Lösning:** Söker alltså en bas för kolonnrummet till matrisen $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} & \mathbf{v_4} & \mathbf{v_5} \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kolonnerna 1, 2 och 4 är pivotkolonner. $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_4}\}$ är en bas för underrummet vars dimension alltså är 3.

## Del 2: Överbetygsdelen

**5.** Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt betyder spegling i planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Bestäm $F$:s matris i standardbasen. (6p)

**Lösning:** Låt $A$ vara standardmatrisen till $F$. Välj en bas $\mathcal{C} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ där $\mathbf{v_1}$ är normal till planet och $\{\mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ är en bas för planet. Då är $A\mathbf{v_1} = -\mathbf{v_1}$, $A\mathbf{v_2} = \mathbf{v_2}$ och $A\mathbf{v_3} = \mathbf{v_3}$. Tillsammans ger detta $A\begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{bmatrix}$. Alltså är $A = \begin{bmatrix} -\mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{bmatrix}^{-1}$. Om man väljer $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ så erhålls

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**6.** Bevisa Cramers regel och utnyttja den för att bestämma lösningen till ekvationssystemet nedan, för de värden på parametern $t$ sådana att regeln kan användas. Ange de $t$-värden som är tillämpliga. (6p)

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 + t^2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 1 \end{cases}$$

**Lösning:** För beviset: se kursboken kapitel 3.3. Cramers regel är tillämpbar på systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om och endast om systemets determinant $\det(A)$ inte är noll.

Här är systemets detminant $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (t-2)(t-3)$.

Eftersom $\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}$ är $\det A_1(\mathbf{b}) = \det(A)$ och $\det A_2(\mathbf{b}) = \det A_3(\mathbf{b}) = 0$.

Således är $x_1 = 1$ och $x_2 = x_3 = 0$ för $t \neq 2, 3$. För $t = 2$ och $t = 3$ är Cramers regel inte tillämpbar.

**7.** Punkterna $(t_1, x_1)$, $(t_2, x_2)$, $(t_3, x_3)$, $(t_4, x_4)$ är givna. Förklara hur man kan bestämma parametrarna $a$, $b$ och $c$, så att $\sum_{i=1}^{4}(at_i + bt_i^2 + ct_i^3 - x_i)^2$ är så liten som möjligt. (6p)

Bevisa att den metod du föreslår ger önskat resultat.

**Lösning:** Eftersom minsta-kvadrat metoden minimerar längden av felvektorn; $\|\epsilon\| = \|A\mathbf{v} - \mathbf{x}\|$ skall den metoden användas på systemet

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

För förklaringar och bevis se kursboken kapitel 6.5.