**MATEMATIK** **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 100313 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt:

**Lösning till Linjär algebra M/TD**

## Del 1: Godkäntdelen

**1.** (a) Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uppfyller $F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}^T$, $F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}^T$ och $F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}^T$. Ange standardmatrisen för $F$. (2p)

**Lösning och svar:** Standardmatrisen ges av $\begin{bmatrix} F(\mathbf{e}_1) & F(\mathbf{e}_2) & F(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

(b) Beräkna $A^{-1}$, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (3p)

**Lösning och svar:** $\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) Ett underrum $H$ i $\mathbb{R}^3$ har basen $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T\right\}$. (3p)

Visa att $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ tillhör $H$ och bestäm koordinatvecktorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

**Lösning:** $\mathbf{v}$ tillhör $H$ om och endast om det finns skalärer $c_1$ och $c_2$ så att $\mathbf{v} = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T$.

Koordinatvektorn är i så fall $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}^T$.

Totalmatris: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ visar att $\mathbf{v}$ tillhör $H$.

**Svar:**

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(d) Bestäm den räta linje som är bäst anpassad till punkterna $(-1,0)$, $(0,1)$ och $(1,3)$ enligt minstakvadratmetoden. (3p)

**Lösning:** Vi söker en linje $y = kx + m$ sådan att $y_i = kx_i + m$ då $(x_i, y_i)$, $i = 1, , 2, 3$ är de tre givna punkterna.

Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} -k + m &= 0 \\ 0k + m &= 1 \\ k + m &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Systemet saknar lösning, bästa anpassning enligt minstakvadratmetoden ges av lösningen till den normaliserade ekvationen

$$A^T A \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

**Svar:** Bästa linjen är: $y = \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}$.

(e) Lös matrisekvationen $XA + B = X$, där (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Lösning:** Under förutsättning att $I-A$ är inverterbar har vi att: $XA+B=X \Leftrightarrow X-XA=B \Leftrightarrow X(I-A)=B \Leftrightarrow X=B(I-A)^{-1}$

Här är $I-A=\begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ -2 & 1+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Denna matris är inverterbar med invers $(I-A)^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ vilket ger

$X=B(I-A)^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

**Svar:** $X=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

**2.** (a) Bestäm skalären $p$ i matrisen (3p)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & p \end{bmatrix}$$

så att ekvationssystemet $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ har icke-trivial lösning.

**Lösning:** $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & p \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 8 & p+1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & p+7 \end{bmatrix}$ **Svar:**

Systemet har icketrivial lösning om och endast om $p=-7$

(b) Låt $p=0$ i matrisen $A$. Lös med hjälp av Cramers regel $x_3$ ur ekvationssystemet (3p)

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

**Lösning:** Om $p=0$ har systemet $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ entydig lösning för alla $\mathbf{b}$. Cramers regel ger att $x_3=\frac{\det A_3(\mathbf{b})}{\det A}$.

$\det A_3(\mathbf{b})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 9 & 4 \end{vmatrix}=-28$, $\det A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & 0 \end{bmatrix}=-28$.

**Svar:** $x_3=1$

**3.** (a) Definiera vad som menas med ett *egenvärde* och en *egenvektor* till en $n\times n$ matris $A$. (2p)

**Svar:** Det reella talet $\lambda$ sägs vara ett *egenvärde* till $A$ om det finns en vektor $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ sådan att $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ och $A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$. Vektorn $\mathbf{v}$ sägs då vara en *egenvektor* till $A$.

(b) Bestäm en diagonalmatris $D$ och en inverterbar matris $P$ sådan att $A=PDP^{-1}$, där (4p)

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Lösning:** Vet att $A=PDP^{-1}$ då $P=\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ och $D=\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ där $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$ är en egenvektorsbas och $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ är motsvarande egenvärden.

Egenvärdena är lösningar till karakteristiska ekvationen: $\det(A-\lambda I)=0$.

$\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)((-1-\lambda)(5-\lambda)+8)=(2-\lambda)(\lambda\ 2-4\lambda+3)=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)$.

Egenvärden 2, 1 och 3.

Egenvektorer till egenvärdet $\lambda$ är de icketriviala lösningarna till ekvationen $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ eller ekvivalent $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

För $\lambda=2$ är $A-\lambda I=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. En egenvektor är $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

För $\lambda = 1$ är $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. En egenvektor är $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

För $\lambda = 3$ är $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. En egenvektor är $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

**Svar:** $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \text{diag}(2, 1, 3)$

**4**. För matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

bestäm:

(a) Rank $A$ och en bas för Col $A$. (2p)

**Lösning:** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Alltså:

**Svar:** Rank $A = 2$. $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\}$ är en bas för Col $A$.

(b) En bas för Nul $A$. (2p)

**Lösning:** Enligt ovan är $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ vilket ger:

**Svar:** $\{\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ är en bas för Nul $A$.

(c) En ortonormerad bas för Col $A$. (2p)

**Lösning:** En ortogonal bas för Col $A$ ges av $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ där $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$ och $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \text{proj}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{a}_2$.

Alltså är $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{-3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Normalisering ger sedan en ortonormerad bas.

**Svar:** $\mathcal{C} = \{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ är en ortonormerad bas för Col $A$.

VÄND!

## Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på deluppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

**5.** Verifiera att matrisen (6p)

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

har egenvektorn $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Visa att $A$ är standardmatrisen för spegling i ett visst plan genom origo; ange speciellt en ekvation för detta plan. Bestäm slutligen standardmatrisen för ortogonalprojektion på samma plan.

**Lösning:** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vilket visar att $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ är en egenvektor till egenvärdet -1.

Denna vektor är normal till planet $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ vilket är enda möjlig kandidaten till spegelplan. Vektorer i detta plan måste i så fall vara egenvektorer till egenvärdet 1.

En bas för planet $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ är $\{\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$. För dessa vektorer gäller: $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Alltså är $A$ standardmatrisen för spegling i planet $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

Om $B$ är standardmatrisen för ortogonalprojektion på samma plan så har $B$ och $A$ samma egenvektorer men $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ är egenvektor till egenvärdet 0 för $B$.

$B$ kan nu beräknas genom $B = PDP^{-1}$ där $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ och $D = \mathrm{diag}(0, 1, 1)$.

Ett alternativt sätt att beräkna $B$ ges av observationen: $\mathrm{diag}(0, 1, 1) = \frac{1}{2}(\mathrm{diag}(-1, 1, 1) + \mathrm{diag}(1, 1, 1))$.

Således är $B = \frac{1}{2}P(\mathrm{diag}(-1, 1, 1) + \mathrm{diag}(1, 1, 1))P^{-1} =$

$\frac{1}{2}(P\mathrm{diag}(-1, 1, 1)P^{-1} + P\mathrm{diag}(1, 1, 1)P^{-1}) = \frac{1}{2}(A + I) = \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right)$

**6.** Visa att om ett vektorrum $V$ har en bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$, med $n$ element, så är varje mängd vektorer i $V$, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_p\}$ med $p > n$, linjärt beroende. Använd sedan detta för att visa att *dimensionen* av ett vektorrum är väldefinierad, dvs att alla baser till ett vektorrum innehåller lika många vektorer. (6p)

**Lösning:** För att visa att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_p\}$ är en linjärt beroende mängd, skall visas att ekvationen $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_p\mathbf{u}_p = \mathbf{0}$ har icketrivial lösning.

Låt $\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ vara koordinatvektorer för vektorerna $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, \cdots, p$ relativt basen $\mathcal{B}$. Detta är då vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Nu gäller: $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_p\mathbf{u}_p = \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} + x_2\begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} + \cdots + x_p\begin{bmatrix} \mathbf{u}_p \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} & [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Matrisen $U = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} & [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$ är en $n \times p$-matris där $n < p$ och har därför högst $n$ pivotkolonner. Således är $\dim \mathrm{Nul}\, U > 0$ och ekvationen $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icketrivial lösning. V.S.V.

Om nu $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_p\}$är baser för $V$ så är båda mängderna linjärt oberoende. Då kan inte $p > n$ eller $n > p$, således är $p = n$. V.S.V.

**7.** Avgöra vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, dvs : Om du hävdar att ett påstående är SANT så måste du förklara varför (rätt svar utan motivering belönas ej). Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du däremot hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du illustrera varför med ett exempel.

(a) Låt $n$ vara ett positivt heltal. För alla $n \times n$ matriser $A$ och $B$ gäller att $\text{Rank}(AB) \leq \text{Rank}(B)$. (2p)

**Svar:** Sant

**Motivering:** Eftersom $B\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow AB\mathbf{x} = A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ så är $\text{Nul}\, B$ ett underrum till $\text{Nul}\, AB$. Alltså är $\dim \text{Nul}\, AB \geq \dim \text{Nul}\, B$. Av detta följer att $\text{Rank}(AB) = n - \dim \text{Nul}\, AB \leq n - \dim \text{Nul}\, B = \text{Rank}(B)$

Alternativt: Antag att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_p\}$ är en bas för $\text{Col}\, B$.

Då är $\text{Col}\, AB = \text{Span}\{A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \cdots, A\mathbf{u}_p\}$. Således är $\text{Rank}(AB) = \dim \text{Col}\, AB \leq p = \dim \text{Col}\, B = \text{Rank}(B)$

(b) Om $A$ och $B$ är radekvivalenta $3 \times 3$-matriser så har $A$ och $B$ samma egenvärden. (2p)

**Svar:** Falskt

**Motivering:** Om $A = \text{diag}(2, 3, 4)$ så har $A$ egenvärden 2, 3 och 4. Men $A$ och $I$ är radekvivalenta och $I$ har egenvärde 1.

(c) Låt $A$ vara en diagonaliserbar $3 \times 3$ matris med egenvärdena $\lambda_1$, $\lambda_2$ och $\lambda_3$. Då gäller att (2p)

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3.$$

**Svar:** Sant

**Motivering:** Vet att $A = PDP^{-1}$ där $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Då är $\det A = \det(P) \cdot \det(D) \cdot \det(P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(D) \cdot (\det(P))^{-1} = \det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$