Lösning till Linjär algebra M/TD

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) Matriserna $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$, $C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ är totalmatriser till tre linjära ekvationssystem. Lös dessa ekvationssystem. (3p)

Lösning och svar: Lösningarna kan avläsas utan räkning. För A kan vi välja x_2 fri och lösa ut $x_1 = 1 - 2x_2$, $x_3 = 1$. För B kan vi välja x_2 fri och lösa ut $x_1 = 1 - 2x_2$, $x_3 = 0$. Matrisen C svarar mot ett system utan lösning.

(b) En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbildar vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestäm standardmatrisen för F. Bestäm också bilden av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning och svar: Vi kan direkt skriva upp standardmatrisen $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Den sökta bilden är då

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Ange baser för kolonnrummet och nollrummet till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning: Succesiv elimination ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De två första kolonnerna är pivotkolonner. Vi kan alltså ta $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ som bas för kolonnrummet. Vi ser vidare att lösningen till det homogena systemet kan skrivas $x_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Vi kan alltså ta $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ som bas för nollrummet.

(d) Bestäm en ortogonal bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ för $\mathbb{R}^2$ om $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm sedan koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ för $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i den bas $\mathcal{B}$ du hittat. (3p)

Lösning: Vi ser att $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}_1$. Koordinatvektorn kan nu beräknas genom projektionsformeln; vi har

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} = \frac{5}{2}.$$

Alltså är $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$.

(e) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning: Elimination av utökade matrisen $[A|I]$ ger

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Alltså är $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & -2 & 3/2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. (a) Förklara vad som menas med begreppet *linjärt beroende mängd av vektorer* i $\mathbb{R}^n$. (2p)

Svar: Se kursboken.

(b) Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}.$$

i. Avgör för vilka värden på h vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ är linjärt beroende. (2p)

ii. För varje värde på h, bestäm dimensionen av det underrum som spänns upp av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. (2p)

Lösning: Vi bildar en matris med de givna vektorerna som kolonner. Succesiv elimination ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & h-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & h+5 \end{bmatrix}.$$

Då $h \neq -5$ är alla kolonner pivotkolonner. De spänner då upp hela rummet och är linjärt oberoende. Då $h = -5$ är enbart de två första kolonnerna pivotkolonner, dvs kolonnerna spänner upp ett plan och är linjärt beroende. Svaret på första delfrågan är alltså för $h = -5$, på andra delfrågan att dimensionen är 2 då $h = -5$ och 3 då $h \neq -5$.

3. (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. (4p)

Lösning: Vi beräknar

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda+3)(\lambda-3).$$

Egenvärdena är alltså ± 3. Egenvärdesekvationen $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ är ekvivalent med $-x_1 + 5x_2 = 0$, eller med $\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}^T$. På samma sätt ger $A\mathbf{x} = -3\mathbf{x}$ egenvektorerna $\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), alla lösningar till följande system av differentialekvationer (2p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases}$$

Lösning: Lösningen kan skrivas

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + D \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t},$$

där C och D är godtyckliga konstanter.

4. Låt $\mathcal{P}$ vara det plan i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(a) Bestäm en ortogonal bas för $\mathcal{P}$. (3p)

Lösning: Vi väljer den första basvektorn som $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. För den andra basvektorn gör vi först ansatsen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T + C \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Villkoret att denna vektor är ortogonal mot $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ ger $C = -4/3$. För att slippa irriterande nämnare tredubblar vi svaret och väljer $\mathbf{b}_2 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T - 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(b) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ på planet $\mathcal{P}$. (3p)

Lösning: Den sökta projektionen ges av

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1} \mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2} \mathbf{b}_2 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Del 2: Överbetygsdelen

5.
- Definiera begreppet *underrum* i ett vektorrum. (6p)
- Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med reella koefficienter och U mängden av alla polynom i $\mathbb{P}_2$ som uppfyller $p(1) = 0$.

  i. Visa att U är ett underrum i $\mathbb{P}_2$.

  ii. Bestäm en bas för U.

  Motivera väl.

Lösning och svar: För definitionen av underrum, se kursboken.

Låt p och q vara två element i U, dvs $p(1) = q(1) = 0$, samt låt a och b vara två tal. Då är

$$(ap + bq)(1) = ap(1) + bq(1) = 0,$$

dvs $ap + bq$ ligger i U. Detta visar att U är ett underrum.

För att bestämma en bas observerar vi först att $\mathbb{P}_2$ har dimension 3 och att U inte är lika med hela $\mathbb{P}_2$. Alltså har U dimension högst 2. Men å andra sidan är $x - 1$ och $(x - 1)^2$ två linjärt oberoende element i U. Dimensionen av U är alltså lika med 2, och de båda givna polynomen bildar en bas. (Det finns andra sätt att resonera.)

6. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt motsvarar en spegling i planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. (6p)

- Bestäm F:s egenvärden och egenvektorer, dvs egenvärdena och egenvektorerna till F:s matris i standardbas.
- Bestäm $F(\mathbf{v})$ då $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.

Lösning och svar: Det är geometriskt klart att det speglande planet består av egenvektorer med egenvärdet 1, och planets normal, dvs linjen $t \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$, av egenvektorer med egenvärdet -1. Tar man två icke-parallella vektorer i planet och en tredje på linjen har man hittat tre linjärt oberoende egenvektorer, och enligt Sats 2 i kapitel 5 kan det då inte finnas fler (detta är också ganska uppenbart geometriskt).

För att bestämma speglingen av vektorn $\mathbf{v}$ beräknar vi först ortogonala projektionen $\mathbf{v}'$ på planets normalvektor $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Enligt projektionsformeln är

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} = \frac{3}{3} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Speglingen ges då av

$$\mathbf{v} - 2\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

7. Visa att om produkten AB av två kvadratiska matriser A och B är inverterbar så är både A och B inverterbara. (6p)

Lösning och svar: Vi påminner om att A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$. Om AB är inverterbar är alltså $\det(AB) \neq 0$. Eftersom $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ gäller att både $\det(A) \neq 0$ och $\det(B) \neq 0$ vilket medför att A och B båda är inverterbara.

Alternativ lösning: Om AB är inverterbar $n \times n$-matris finns en $n \times n$-matris $C = (AB)^{-1}$ så att $(AB)C = C(AB) = I$. Bå är BC en $n \times n$-matris sådan att $A(BC) = I$. Enligt Sats 8 (k) i Kapitel 2 gäller då att A är inverterbar. Eftersom $(CA)B = I$ gäller enligt Sats 8 (j) att B är inverterbar.