Tentamen
Lösningar till TMV166/186 Linjär algebra M/TD

120307 kl. 08.30–12.30

Examinator: Carl-Henrik Fant, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. (3p)

Lösning:
Vi gör först radoperationer, och utvecklar sedan efter rader:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

(b) Ange standardmatrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbildar $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkna även $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$. (2p)

Lösning:
Vi kan direkt skriva upp avbildningsmatrisen $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vi har då

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:
Upprepade radoperationer ger

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Alltså är

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Ange en bas för $\mathrm{Col}(A)$ och en bas för $\mathrm{Nul}(A)$. (3p)

Lösning:
Vi har

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alltså bildar pivotkolonnerna $[1\ 1\ 2]^T$, $[0\ 1\ 0]^T$ en bas för kolonnrummet och $[-2\ \ -2\ 1\ 0]^T$, $[-1\ 1\ 0\ 1]^T$ en bas för nollrummet.

(e) Bestäm den räta linje $y = a + bx$ som är bäst anpassad, i minstakvadrat-metodens mening, till punkterna $(x, y) = (1, 0), (2, 1), (3, 1)$. (3p)

Lösning:
Insättning av punkterna i linjens ekvation ger

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = 1 \\ a + 3b = 1. \end{cases}$$

Normalekvationerna för detta system är

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dvs

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Detta har lösningen $a = -1/3$, $b = 1/2$, så den sökta linjen är

$$y = -\frac{1}{3} + \frac{x}{2}.$$

2. (a) Förklara vad som menas med $W^{\perp}$ för ett underrum W av $\mathbb{R}^n$. (1p)

Lösning: Se kursboken.

(b) Låt W vara det underrum av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Verifiera (1p)

att vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ligger i $W^{\perp}$.

Lösning: Låt $\mathbf{u}_1 = [1\ \ -1\ 1\ 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [2\ \ -3\ 1\ \ -1]$, $\mathbf{x} = [1\ 1\ 0\ \ -1]^T$. Det räcker att kontrollera att $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2 = 0$.

(c) Bestäm en ortogonal bas för W. (2p)

Lösning: Med Gram–Schmidts metod sätter vi $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ och

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Då är $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en ortogonal bas för W.

(d) Beräkna ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ på W. Skriv $\mathbf{y}$ som en summa $\mathbf{y} = \mathbf{y}' + \mathbf{y}''$ där $\mathbf{y}' \in W$ och $\mathbf{y}'' \in W^{\perp}$. (2p)

Lösning: $\mathbf{y}'$ är ortogonala projektionen av $\mathbf{y}$ på W och ges av

$$\mathbf{y}' = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{y}''$ är ortogonala projektionen av $\mathbf{y}$ på $W^{\perp}$ och ges av

$$\mathbf{y}'' = \mathbf{y} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A. (3p)

Lösning: Karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ har rötterna $\lambda = \pm 5$, som alltså är matrisens egenvärden. Ekvationen $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ har lösningarna $c[2\ 1]^T$, ekvationen $A\mathbf{x} = -5\mathbf{x}$ lösningarna $c[1\ {-2}]^T$. Dessa vektorer, med $c \neq 0$ är matrisens egenvektorer.

(b) Ange en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^T$. (1p)

Lösning: Vi kan ta $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (kolonnerna är egenvektorer med längd 1) och $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) Betrakta den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2$. Gör ett variabelbyte $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ som överför Q till en kvadratisk form av typen $cy_1^2 + dy_2^2$. Ange U, c och d. (2p)

Lösning: Vi kan ta $U = P^T$ med P som ovan, $c = 5$ och $d = -5$.

4. (a) Definiera begreppet *koordinater* för en vektor relativt en bas för ett underrum av $\mathbb{R}^n$. (2p)

Lösning: Se kursboken.

(b) Visa att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$, där (4p)

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix},$$

och ange koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ relativt basen $\mathcal{B}$.

Lösning: Upprepade radoperationer ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Eftersom koefficientmatrisen reduceras till enhetsmatrisen är de givna vektorerna en bas. I högerledet läser vi av koordinaterna $[-1\ 2\ \ -1]^T$.

Del 2: Överbetygsdelen

5. Följande deluppgifter, som maximalt kan ge 2p per deluppgift, skall besvaras med Sant eller Falskt. Svarar du Sant, ge en tydlig motivering. Svarar du Falskt, ge ett motexempel. Enbart svar ger inga poäng.

(a) Om T är en injektiv linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, så är $n \leq m$.

Lösning: Detta är Sant. Att T är injektiv är ekvivalent med att avbildningsmatrisen för T (som är en $m \times n$-matris) har pivotelement i varje kolonn. Men eftersom dessa n pivotelement ligger i olika rader måste $m \geq n$.

(b) Om A är radekvivalent med enhetsmatrisen så är A diagonaliserbar.

Lösning: Detta är Falskt. Ett motexempel ges av $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Om P är ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$ och $T(\mathbf{x})$ betecknar spegelbilden av vektorn $\mathbf{x}$ i P, så är standardmatrisen för avbildningen T diagonaliserbar.

Lösning: Detta är Sant. Tag två icke-parallella vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i P samt en normalvektor $\mathbf{w}$ till P. Dessa är linjärt oberoende, och alltså en bas för $\mathbf{R}^3$. Vidare är $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ och $T(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}$, så $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är egenvektorer. Det finns alltså en bas för hela rummet bestående av egenvektorer, vilket är definitionen av att vara diagonaliserbar.

6. (a) Visa att de fyra polynomen (3p)

$$B_0(t) = (1-t)^3, B_1(t) = 3t(1-t)^2, B_2(t) = 3t^2(1-t), B_3(t) = t^3$$

bildar en bas för rummet av alla polynom av grad högst 3 ($\mathbb{P}_3$).

Lösning:

(b) Bestäm koordinaterna för polynomet $p(t) = t^2 + 1$ i den basen. (3p)

Lösning 1: Genom att införa standardbasen $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$ kan vi identifiera rummet av polynom med $\mathbb{R}^4$. De givna polynomen identifieras då med vektorerna

$[B_0]_\mathcal{E} = [1\ -3\ 3\ -1]^T$, $[B_1]_\mathcal{E} = [0\ 3\ -6\ 3]^T$, $[B_2]_\mathcal{E} = [0\ 0\ 3\ -3]^T$, $[B_3]_\mathcal{E} = [0\ 0\ 0\ 1]^T$, och polynomet p med $[p]_\mathcal{E} = [1\ 0\ 1\ 0]^T$. Vi ställer upp den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Här kan vi läsa av både att polynomen $\{B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3\}$ bildar en bas (koefficientmatrisen är radekvivalent med enhetsmatrisen) och att de sökta koordinaterna är $[1\ 1\ 4/3\ 2]^T$.

Lösning 2: Om vi vill skriva ett polynom p som linjärkombination av polynomen $B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3$ får vi

$$p(t) = A(1-t)^3 + 3Bt(1-t)^2 + 3Ct^2(1-t) + Dt^3.$$

Vi får efter förenkling

$$A + (-3A+3B)t + (3A-6B+3C)t^2 + (-A+3B-3C+D)t^3 = p(t).$$

Två polynom är lika om och endast om koefficienterna i de två polynomen är lika. I specialfallet $p(t) = 1 + t^2$ får vi ett ekvationssystem med samma totalmatris som ovan. Samma kalkyler visar att ekvationssystemet har entydig lösning för alla polynom $p(t)$, polynomen $\{B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3\}$ bildar alltså en bas. Man läser av koordinaterna $[A\ B\ C\ D] = [1\ 1\ 4/3\ 2]$.

7. (a) Visa att för varje matris A är $Nul(A) = Nul(A^TA)$. (3p)

Lösning: Det gäller att visa att $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Implikationen åt höger följer genom att multiplicera med A^T. Implikationen åt vänster inses till exempel genom att skriva

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = (A\mathbf{x})^TA\mathbf{x} = \mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x}.$$

Om $A^TA\mathbf{x} = 0$ är alltså $\|A\mathbf{x}\|^2 = 0$, vilket medför $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ett annat resonemang är följande: Om $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så är $\mathbf{x}$ minstakvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Då är $A\mathbf{x}$ projektionen av $\mathbf{0}$ på $\operatorname{Col} A$ vilket medför $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Visa till exempel med hjälp av sambandet i (a) att $Col(A) = Col(AA^T)$. (Du måste inte ha gjort (a) för att få utnyttja detta i (b).) (3p)

Lösning: Enligt (a) gäller $\mathrm{Nul}(A)^\perp = \mathrm{Nul}(A^TA)^\perp$. Detta kan skrivas $\mathrm{Col}(A^T) = \mathrm{Col}((A^TA)^T) = \mathrm{Col}(A^TA)$. Kalla nu A för A^T och vi är klara.