TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Vecko–PM läsvecka 1

Allmänt om kursen

Låt mig först, utgående från kursens syfte och mål, ge några allmänna råd och kommentarer.

Kursens syfte är att, tillsammans med övriga matematikkurser, ge en matematisk allmänbildning som är så användbar som möjligt i fortsatta studier och teknisk yrkesverksamhet. Kursen skall på ett logiskt och sammanhängande sätt ge de kunskaper i linjär algebra som är nödvändiga för övriga kurser inom M-programmet. Studenterna skall efter genomgången kurs
- kunna redogöra för innebörden hos den linjära algebrans grundläggande begrepp
- ha fått förståelse för och kunna redogöra för sambanden mellan de olika begreppen
- kunna kombinera kunskaper om olika begrepp i praktisk problemlösning
- kunna utnyttja programspråket MATLAB för problemlösning.

Som du ser ligger tonvikten på begreppen och sambanden mellan dessa. En stor del av övningsuppgifterna i läroboken är av teoretisk natur just i avsikt att tydliggöra begreppen, deras egenskaper och vilka slutsatser man kan dra av dessa. Kalkylerna i de räknemässiga uppgifterna är i allmänhet relativt enkla och inte så omfattande. Det finns en del mer komplexa uppgifter som med fördel kan lösas med hjälp av Matlab.

De föreslagna övningsuppgifterna är organiserade på ett sätt som ansluter till kursens mål och uppdelningen i *godkändmål* och *överbetygsmål*. Först föreslås ett antal *instuderingsuppgifter*. Dessa inkluderar alltid det som i boken kallas *practice problems*. Genom att lösa dem och jämföra med bokens lösning, som du hittar direkt efter övningsuppgifterna på samma avsnitt, får du en kontroll av att du förstått det mest grundläggande. Därefter följer ett antal *träningsuppgifter* där du går lite djupare in på begreppen, tillsammans skall dessa ge träning för godkändnivån. Den tredje gruppen uppgifter är av fördjupande natur där du verkligen får tänka igenom vad de olika begreppen har för egenskaper och hur de hänger ihop med varandra.

Utöver dessa uppgifter föreslås ibland gruppövningar som lämpar sig för diskussion i grupper om fyra studenter och där Matlab är ett utmärkt hjälpmedel för kalkylerna. Dessa uppgifter ger ytterligare insikter om begreppen men är också en bra träning för matlabövningarna och för framtida tillämpning av Matlab.

Även sant/falskt-frågorna lämpar sig väl för gruppbearbetning. Att argumentera för en viss uppfattning är oerhört lärorikt. Du kommer att se att du måste ha precision i din kunskap för att rätt uppfatta frågorna och förklara för andra hur det hela hänger ihop.

Ännu ett råd: Läs **författarens förord** och **A note to student**. Dessa innehåller praktisk information och kommentarer som kan öka din förförståelse. Kunskaper som kan spara mycket tid.

Slutligen: Med *Vecka* menas här *temavecka* som är den tid vi ägnar undervisningen åt ett visst område. Oftast inleds temaveckan på tisdagen och avslutas följande måndag. Föreläsningarna på måndagar är tänkta att vara summerande och ibland fördjupande. Då bör du ha arbetat så mycket med veckans stoff att du vet vad du tycker är svårt att förstå så att du kan ställa rätt frågor. Det är viktigt att du aldrig halkar totalt efter, då blir undervisningen oftast obegriplig. Får du tidsnöd, läs iallafall bokens text en gång och gör åtminstone instuderingsuppgifterna. Vissa veckor krävs inte två timmar för summering, då kan det nya stoffet behandlas även på måndagen.

Kapitel 1 Linjära ekvationer i linjär algebra

Innehåll: I kursen *Matematisk analys i en variabel* såg vi att man kan skriva ett system av första ordningens differentialekvationer som ett linjärt ekvationssystem. Detsamma gäller för otaliga andra frågeställningar. I avsnitt **1.1** beskrivs därför linjära ekvationssystem från grunden, och en allmän procedur för att lösa sådana system introduceras. Denna metod, ofta kallad *Gausselimination*, kan också visa att systemet inte har några lösningar alls, eller att det har oändligt många lösningar.

Tidigare har du sett att en linjär ekvation med tre obekanta kan uppfattas som ekvationen för ett plan. Lösningen till ett ekvationssystem med tre obekanta kan därmed ses som skärningen mellan plan. Skriver vi ekvationssystemet med utvidgad koefficientmatris (totalmatris) är det alltså raderna i denna matris vi har i fokus då vi tänker på detta sätt.

I avsnitt **1.3** har vi istället totalmatrisens kolonner i fokus och ser lösningen som ett samband mellan dessa kolonnvektorer. Detta synsätt är centralt i en del tillämpningar, t.ex. inom mekanik och hållfasthetslära. Viktiga begrepp är *linjärkombination* och *linjärt hölje*.

I avsnitt **1.4** införs matrisbeteckningen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ för ekvationssystem. Här har vi fortfarande kolonnvektorerna i fokus men koefficientmatrisen A ger oss möjlighet att enkelt tala om alla kolonnerna samtidigt. Satserna 3 och 4 är centrala.

Avsnitt **1.5** är i viss mån repetition av inslag i Adams kapitel 10, men samtidigt ger det en ny syn på det du redan kan. I avsnitt **1.6** tillämpas ekvationssystem på tre områden vi inte tidigare behandlat. Det viktiga här är att se hur man kan systematisera resonemang genom att arbeta med vektorer och matriser istället för enskilda termer. Se t.ex hur en kemisk molekyl kan beskrivas med en vektor och att kemisk jämvikt därför kan tecknas med en vektorekvation.

I avsnitt **1.7** behandlas två begrepp *linjärt beroende* och *linjärt oberoende* och deras samband med lösningar till ekvationssystem. Här är det också koefficientmatrisens kolonnvektorer som är i fokus. De två begreppen är mycket viktiga för fortsättningen av kursen. Tre vektorer i rummet är linjärt beroende om de ligger i ett plan, annars är de linjärt oberoende. Fler än tre vektorer i rummet är alltid linjärt beroende, det finns ett linjärt samband mellan dem. Dessa tankar utvecklas i satserna 7, 8 och 9.

I **1.8** och **1.9** behandlas *linjära avbildningar*. Detta är en utvidgning av en idé du mött ganska tidigt i skolan. Om du har en ekvation som $x^2+3x = 5$ kan du dels se den bara som en ekvation, du vill veta vad x är, det är allt. Men du kan också se uttrycket x^2+3x som ett funktionsuttryck. Du har en funktion $f(x) = x^2 + 3x$ och vill veta för vilket värde på x som $f(x) = 5$. Samma ekvation men ett annat sätt att tänka om den, Du kan ställa helt nya frågor om ekvationen. På samma sätt är $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ en funktion och vi kan undersöka denna funktions egenskaper. Vad har den för definitionsmängd och värdemängd? Vilka $\boldsymbol{x}$ avbildas på ett visst $\boldsymbol{y}$? Hur hänger funktionens egenskaper samman med matrisen? Dessa avsnitt lägger grunden för resonemang och tankar som återkommer genom hela kursen.

Lärandemål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Lay	Mål
1.1	lösa linjära ekvationssystem med eliminationsmetoden
1.1	förklara hur de olika typerna av lösningsmängder uppkommer och hur de kan beskrivas.
1.2	använda sats 1.2.2 i problemlösning
1.3	förklara hur ett ekvationssystem hänger samman med en vektorekvation $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + \ \cdots\ + x_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{b}$
1.3	avgöra om en vektor är en *linjärkombination* av givna vektorer.
1.3	avgöra om en vektor tillhör linjära höljet (span) av givna vektorer.
1.4	använda sats 1.4.4 i problemlösning
1.4	förklara hur ett ekvationssystem hänger samman med matrisekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
1.5	skriva lösningsmängden till ett ekvationssystem på vektorform
1.7	avgöra om en given mängd av vektorer är *linjärt beroende* eller *linjärt oberoende*.
1.8	avgöra om en given avbildning är linjär
1.9	bestämma standardmatrisen till en linjär avbildning F då $F(\boldsymbol{v})$ är givet för tillräckligt många vektorer $\boldsymbol{v}$.
1.9	bestämma standardmatrisen till en linjär avbildning som ges av en geometrisk beskrivning
1.9	avgöra om en linjär avbildning given på matrisform är *injektiv* och/eller *surjektiv*

För överbetyg skall du också kunna:

Lay	Mål
1.1	förklara varför eliminationsmetoden leder till ekvivalenta system och vad detta innebär.
1.3	redogöra för begreppen *linjärkombination* och *linjärt hölje*.
1.4	bevisa sats 1.4.4
1.5	bevisa sats 1.5.6
1.7	redogöra för begreppen *linjärt beroende* och *linjärt oberoende*
1.7	förklara hur begreppen *linjärkombination*, *linjärt hölje*, *linjärt beroende* och *linjärt oberoende* hänger samman med egenskaper hos ekvationssystem, matrisekvationer och vektorekvationer
1.7	bevisa sats 1.7.8 och 1.7.9
1.9	besvara teoretiska frågor om injektivitet och surjektivitet för linjära avbildningar.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt, lösningar finns i slutet av avsnittet.)

Avsnitt	Godkändnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
1.1	PP, 3, 7, 13, 15, 18	14, 24, 27, 31	
1.2	PP, 1, 3, 7	11, 14, 16, 21, 25, 26, 33	
1.3	PP, 9, 11, 13, 17	23, 24, 29, 30	
1.4	PP, 1, 3, 11	16, 23, 24, 26	
1.5	PP, 3, 6, 11	21, 23, 24, 33	
1.6		Gruppövningar: 3, 7, 13	
1.7	PP, 5, 7	9, 13, 21, 22	30, 33–38
1.8	PP, 3, 11	18, 21, 22, 33	31
1.9	PP, 1, 3, 6, 17, 25, 27	7, 11, 23, 24	31, 32, 34, 35