TMV166 Linjär algebra för M, vt 2016
Vecko–PM läsvecka 3

Lay: 2.8 - 2.9, 4.1 - 4.7 Vektorrum, underrum, baser, dimension och rang .

Innehållet i avsnitten 2.8 och 2.9 täcks av kapitel 4, men presenterar begreppen på ett mer konkret sätt. Samtidigt behövs den mer abstrakta synen som ges i kapitel 4. Därför kommer vi att behandla kapitlen samtidigt och i viss mån hoppa fram och tillbaka. **Även om du koncentrerar dig på 2.8-9 så bör du lösa en stor del av övningsuppgifterna ur kapitel 4**. Centrala begrepp är *underrum, bas för underrum, dimension och rang*, som preciserar en del av det vi mött tidigare. Underrum i $\mathbb{R}^3$ är linjer och plan genom origo, dessa har dimension 1 respektive 2, en bas för linjen består av en vektor som spänner upp linjen. En bas för ett plan består av två vektorer som spänner upp planet. I kapitlet generaliseras detta till högre dimensioner. Även hela $\mathbb{R}^3$ och mängden som bara innehåller nollvektorn är underrum.
Särskilt viktiga underrrum i $\mathbb{R}^n$ är nollrum och kolonnrum till matriser. Nollrummet är samma som lösningsmängden till den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kolonnrummet är samma som mängden av alla $\mathbf{b}$ för vilka ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är konsistent. I sats 2.8.12 bevisas att de är underrum och av beviset framgår hur detta hänger samman med matrismultiplikationens linjära egenskaper.
Matrisrang, som är dimensionen för kolonnrummet, är viktigt i vissa tillämpningar, t.ex. inom reglerteknik. Rangsatsen beskriver samspelet mellan dimensioner för nollrum och kolonnrum.

Basbegreppet är oerhört viktigt. Tänk på att en bas är *en mängd av vektorer*. Lite oegentligt talar vi om de enskilda medlemmarna i en bas som *basvektorer* vilket kan ge intrycket att de ensamma har någon speciell egenskap. Så är det inte, varje vektor utom nollvektorn kan ingå i en bas. Det är väsentligt att du lär dig bestämma baser för nollrum och kolonnrum för matriser. Sats 2.8.13 beskriver hur man gör.

Satsen om inverterbara matriser får ytterligare ett par viktiga punkter i detta kapitel. Den borde för övrigt inkludera även sats 3.2.4.

Kapitel 4 innebär alltså en generalisering av 2.8 och 2.9. Genom att konkretisera och jämföra med 2.8-9 så blir det mer gripbart. I övningsuppgifterna handlar det ofta om $\mathbb{R}^n$ och matriser. Idén i kapitlet är att ge en sammanhållande teori för fenomen som är olika men har samma grundläggande egenskaper och det är först genom att gå till den allmänna teorin vi kan hantera koordinatbyte riktigt bra. Att detta är viktigt framgår förhoppningsvis av laboration 3 som visar att det i många tillämpningar handlar om att välja en bas som är lämplig för det aktuella problemet och sedan växla mellan denna bas och standardbasen med hjälp av *basbytesmatrisen* $P_{\mathcal{B}}$.

I **4.1** är sats 1 med vars hjälp man oftast enkelt kan visa att en viss mängd är ett underrum i något större vektorrum extra viktig.

Exempel 4.2.8 och 4.2.9 ger intressanta kopplingar till föregående kurs. Liksom för linjära ekvationssystem ges allmän lösning för vissa differentialekvationer av en partikulärlösning och allmänna lösningen till homogena ekvationen. Här får denna analogi en förklaring.

I **4.5** ingår flera viktiga satser: satserna 9 och 10 som ger möjlighet att definiera begreppet dimension, Sats 11 som visar att om H är äkta underrum i V så har H lägre dimension än V och sats 12, bassatsen, som ofta leder till att det kontrollerande räknearbetet kan minskas.
Beviset av sats 9 är belysande då det visar hur uttalanden om allmänna vektorrum ofta hänger samman med uttalanden om linjära ekvationssystem.

Målet i **4.7** är att beskriva sambandet mellan en vektors koordinatvektorer relativt två *olika* baser $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$. **Sats 15** säger allt. Beteckningarna är lite jobbiga men samtidigt logiska. Basbytesmatrisen som konverterar $\mathcal{B}$-koordinater till $\mathcal{C}$-koordinater betecknas $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$. Eftersom $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ är det logiskt att pilen går från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{C}$. Riktningen, från höger till vänster, motiveras också om vi ser på

upprepade koordinatbyten, först från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{C}$ sedan från $\mathcal{C}$ till $\mathcal{D}$. det sammansatta koordinatbytet från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{D}$ ges av matrisprodukten $\underset{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}{Q}\,\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$.
En svårighet är att varje matris kan ha flera tolkningar. Senare i kursen (avsnitt **5.4**) kommer vi att införa begreppet avbildningsmatris för en godtycklig linjär avbildning $V \to W$. Avbildningsmatrisen A överför koordinaterna för en vektor $\mathbf{x}$ i en viss bas för V till koordinaterna för *en annan vektor* $T(\mathbf{x})$ i en bas för W, $A[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}$. Basbytesmatrisen opererar däremot på *olika koordinater för en och samma vektor*, $P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$. Den vänsterriktade pilen i $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ kan tjäna till att få oss att tolka matrisen rätt.

Lärmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Lay	Mål
2.8	definiera begreppet underrum i $\mathbb{R}^n$ och avgöra om en viss mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
2.8	definiera begreppet *bas* för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
2.8 4.2	definiera begreppet *nollrum*, $\mathrm{Nul}(A)$, till en matris A, avgöra om en given vektor tillhör $\mathrm{Nul}(A)$ samt bestämma en bas för $\mathrm{Nul}(A)$.
2.8 4.2	definiera begreppet *kolonnrum*, $\mathrm{Col}(A)$, till en matris A, avgöra om en given vektor tillhör $\mathrm{Col}(A)$ samt bestämma en bas för $\mathrm{Col}(A)$.
2.9	definiera begreppet *koordinater för en vektor relativt en bas* och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
2.9	definiera begreppet *dimension* av ett underrum i $\mathbb{R}^n$ och bestämma dimensionen för ett underrum.
2.9	definiera begreppet *rang* för en matris och bestämma rangen för en matris.
2.9	tillämpa *Rang-satsen* vid problemlösning
2.9	tillämpa *Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)* vid problemlösning
4.7	växla mellan olika baser för $\mathbb{R}^n$, Sats 4.7.15 är central.

För överbetyg skall du också kunna:

Lay	Mål
2.8 4.2	bevisa att nollrum och kolonnrum är underrum i lämpligt $\mathbb{R}^n$ och känna till deras tolkningar i samband med ekvationssystem och linjära transformationer.
2.9	formulera och bevisa *Rang-satsen*.
4.1	känna till de viktigaste exemplen på vektorrum och kunna ge belysande exempel.
4.1	definiera begreppet underrum i ett vektorrum och kunna avgöra om en given delmängd av ett känt vektorrum är ett underrum
4.3	definiera begreppen *bas* för ett vektorrum
4.4	definiera begreppet *koordinater för en vektor relativt en bas* och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas.
4.4	använda koordinatbytesmatriser vid problemlösning
4.5	bevisa att varje mängd bestående av fler vektorer i ett vektorrum V, än vad som finns i en bas för V, måste vara linjärt beroende samt utnyttja detta för att bevisa att antalet vektorer i en bas för ett vektorrum är entydigt bestämt.
4.5	definiera begreppet *dimension* för vektorrum.
4.6	förklara varför de olika egenskaperna som nämns i *Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)* är ekvivalenta.
4.7	växla mellan olika baser för andra vektorrum än $\mathbb{R}^n$.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
2.8	PP, 1, 3, 7, 9, 15–20, 23	21, 22	27, 31
2.9	PP, 1, 5, 7, 11, 13	15, 17, 18	19–27
4.1	PP, 1, 3, 4	7, 11, 15, 24	19, 20, 33, 34
4.2	PP, 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17	21, 25, 26	27, 28, 30, 34
4.3	PP, 3, 4, 9, 10, 13	11, 15, 21–23, 29, 30	36–38
4.4	PP, 1, 3, 7, 10	11	13, 15, 16, 23–25, 27, 33
4.5	PP, 1, 6, 11, 14	8, 19, 20, 29 (med $V = \mathbb{R}^n$), 33	21, 27, 31
4.6	PP, 1, 3, 5	7, 9, 13, 15	17, 18, 21, 23, 30, 35