TMV166

Linjär algebra

Föreläsare: Tony Stillfjord

Praktisk information

* Kurshemsida: Googla TMV166 (16/17) (eller via PingPong)
  Här hittar ni allt jag säger nu (+ mer)

* Kursmål: Lära ut grunderna i linjär algebra, vilket behövs i de flesta övriga kurser.

Mer konkreta lärmål publiceras varje vecka i veckoPM

* Schema: 3 föreläsn./v., 2 övn., 1 lab.
  OBS! olika salar!

* Kurslitteratur: Lay, 5th ed. (eller 4:e)

Viktigt om övn./lab.:

* Övn. fredagar, V2 och framåt: Studenterna presenterar utvalda uppgifter skriftligt och muntligt -> bonuspoäng
  Läs instruktioner på hemsidan: anmäl till övn. grupp i PingPong.

* Datorlabbar obligatoriska, redovisning på labtid

* Arbeta helst i par på lab (men inte fler)

* Antingen lab 8-9:45 eller 10-11:45 : anmäl i PingPong

* Examination:

Labbar + tenta

Betyg enligt poäng på tenta

Tentafrågor enligt veckoPM-mål

IDAG: Linjära ekvationssystem (L.E.S.)

<u>Def.</u>: En linjär ekvation i variablerna $x_1, x_2, \dots, x_n$ har formen $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$,

där a_j, $j = 1, \dots, n$ och b är givna konstanter.

<u>Inte</u> linjära: $ax^2 = b$, $a\sqrt{x} = b$, $a\sin(x) = b$

<u>Linjär</u>: $a^2 x = \sqrt{b}$ (om x är variabeln)

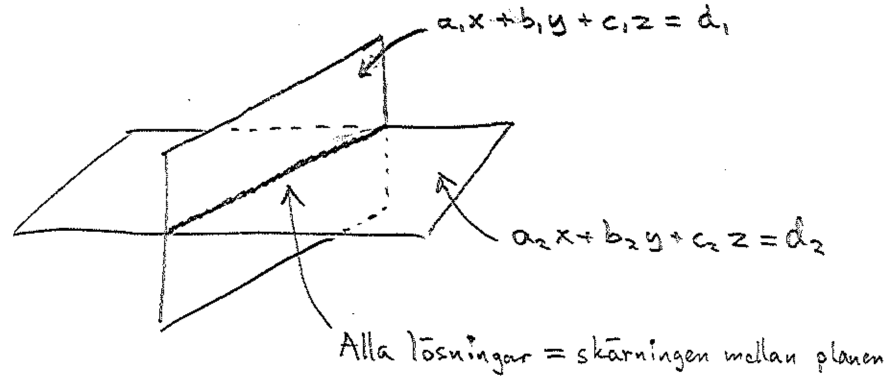
<u>Def.</u>: Ett L.E.S. är en samling av $m \geq 1$ linjära ekvationer i samma variabler.

<u>Ex.</u>: $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - \frac{5}{2} x_3 = 7 \\ x_1 \qquad\qquad + 8x_3 = 4 \end{cases}$ $(m=2, n=3)$

Mål: Lösa dylika L.E.S., dvs. hitta $x_1, \dots, x_n$ som uppfyller alla ekvationerna.

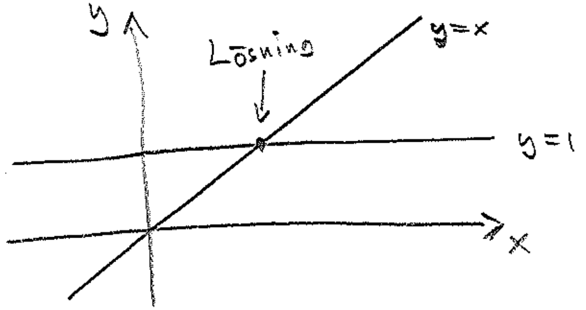
Obs.: $ax + by + cz = d$ beskriver ett plan i 3D

$\Rightarrow$ L.E.S. i 3 variabler motsvarar skärning av plan

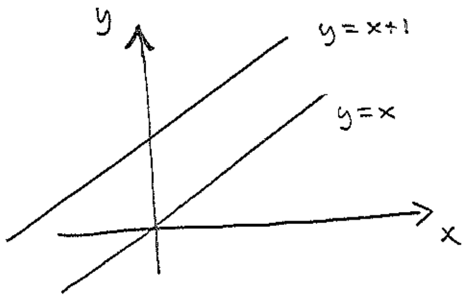


Ännu enklare: 2 variabler motsvarar en linje i 2D

Ex.: $\begin{cases} 1\cdot x - 1\cdot y = 0 \\ 0\cdot x + 1\cdot y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 1 \end{cases}$

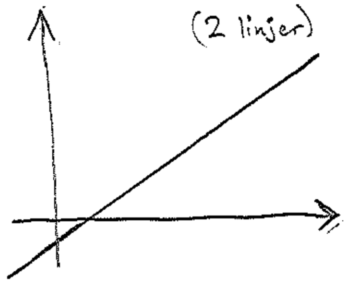


Vi kan också ha t.ex.



Inga lösningar!

eller



∞ antal lösningar!

Alltså: Antingen 1, inga eller ∞ antal lösningar

Aldrig t.ex. 2 eller 5.

P.g.a. linearitet, raka linjer.

Bevis senare.

Def.: Ett L.E.S. är konsistent om det har minst en lösning, annars är det inkonsistent.

Allmän strategi för att lösa ett L.E.S.:

Konvertera till ett ekvivalent L.E.S. på "enkel form".

t.ex. $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 7 \\ \quad\quad 10x_2 = 5 \end{cases}$ ← Härur får vi direkt x_2 och sen x_1 från den första ekvationen.

Hur gör vi det då?

<u>Ex.</u>: (Gausselimination, eller <u>radreducering</u>)

Låt

$$(1)\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 8 \\ \quad\quad 4x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}.$$

Subtrahera $2 * $ ekv. 1 från ekv. 2:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ \quad -8x_2 + 4x_3 = 4 \\ \quad\quad 4x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Notera: Ekvivalent eftersom vi kan återfå (1) genom att addera $2 *$ ekv. 1 till ekv. 2.

Nu tittar vi på ekv. 2 och 3. Addera $\frac{1}{2} *$ ekv. 2 till ekv. 3:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ \quad -8x_2 + 4x_3 = 4 \\ \quad\quad\quad -2x_3 = 4 \end{cases}$$

Nu vet vi x_3 och kan hitta x_2 och x_1 genom att sätta in $x_3 = -2$. Det är dock tydligare att fortsätta proceduren baklänges:

Addera $2 *$ ekv. 3 till ekv. 2 och subtrahera $\frac{3}{2} *$ ekv. 3 från ekv. 1:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 - \frac{3}{2} \cdot 4 = -4 \\ \quad -8x_2 = 12 \\ \quad\quad -2x_3 = 4 \end{cases}$$

Slutligen addera $3/8 *$ ekv. 2 till ekv. 1:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 + 3/8 \cdot 12 = -8/2 + 9/2 = 1/2 \\ \quad x_2 = -3/2 \\ \quad\quad x_3 = -2 \end{cases}$$

I sista steget har vi också skalat om ekv. 2 och 3.

Innan vi går vidare vill vi ha ett mer kompakt skrivsätt för sådana här operationer.

Matrisform

Vi skriver systemet (1) med

koefficientmatrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ och

högerleds vektorn (eller matrisen) $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$,

alternativt med totalmatrisen

$$[A\ b] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obs: Kan hända att jag använder ( ) istället för [ ].

Vi säger att A är en 3×3-matris ("3 kryss 3"), b är 3×1 och $[A\ b]$ är 3×4, dvs.

(Skrivs kort som $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$)

Def.: En $m\times n$-matris har m rader och n kolonner.

Med denna notation kommer vi skriva föregående exempel som

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ +\frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\frac{3}{2} \\ +2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} +\frac{3}{8} \\ \times\frac{-1}{8} \\ \times\frac{-1}{2} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Jämför dessa räkningar med det "vanliga" skrivsättet tidigare!

De radoperationer som leder till ett ekvivalent L.E.S. är:

I Byt en rad mot sig själv plus en multipel av en annan rad

II Multiplicera en rad med en konstant ($\neq 0$!)

III Byt plats på två rader

(Egentligen är II specialfall av I.) III har vi inte använt ännu, men borde vara självklar (dock viktig!).

<u>Def</u>. Två matriser är <u>radekvivalenta</u> om det finns en sekvens av radoperationer (I, II, III) som transformerar den ena till den andra.

Vi skriver $A \sim B$ om A och B är radekvivalenta.

<u>Sats</u>: Om totalmatriserna för två L.E.S. är radekvivalenta så har dessa samma lösningar.

<u>Ex.</u>: (Lay ex. 3)
$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 1 \end{cases}$$

Totalmatrisen: Nu använder vi III.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{array}\right) {\scriptstyle -2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{array}\right) {\scriptstyle +2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right) \Rightarrow 0 = 15!$$

$\therefore$ Systemet är inte konsistent, inga lösningar existerar.

<u>Ex. modifikation</u>: Byt ekv. 3 till $4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = -14$

$$\Rightarrow \text{Totalmatrisen} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0 = 0!$$

∞ antal lösningar!

x_3 är en s.k. fri variabel, olika val på x_3 ger olika lösningar (x_1, x_2, x_3)

Def. En matris är på trappstegsform (echelon form)

om den ser ut som

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{pmatrix}, \quad \text{där} \quad \begin{array}{l} \blacksquare = \text{pivot}, \neq 0 \\ * = \text{godtyckligt element} \end{array}.$$

och på reducerad trappstegsform eller radkanonisk form

om den ser ut som

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Se Lay s. 29 för precis definition)

Sats (1.2.2) Varje matris är radekvivalent med precis en radkanonisk matris.

Bevis: Lite för svårt nu.

Def. En pivotposition i matrisen A är positionen som motsvarar det första 1-elementet i en rad av den radkanoniska formen av A.

En pivotkolonn är en kolonn av A som innehåller en pivotposition.

Ex.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{motsvarar} \quad \begin{cases} x_1 - 5x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

pivotpositioner

inkonsistent om sista kolonnen pivotkolonn!

Def. Variablerna som motsvarar pivotpositioner kallas bundna variabler (x_1, x_2 i ex.). De övriga kallas fria variabler (x_3 i ex.).

* Läs algoritmen i Lay s. 31-33 som detaljerat beskriver hur vi erhåller den radkanoniska formen av A (specificering av våra räkningar hittills).

<u>Summering</u>: För att lösa ett L.E.S skriver vi upp totalmatrisen och reducerar den till radkanonisk form. Genom att titta på sista raden ser vi om systemet är konsistent. Ifall det är det kan vi välja de fria variablerna hur som helst, och sen enkelt räkna ut de bundna variablerna.