IDAG: Mer om determinanter

Mål: * Räkna ut $\det A$ effektivt

* Lösa $Ax=b$ och hitta A^{-1} via $\det A$

I $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ges de elementära radoperationerna av matriser av formen

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_S = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(rad i = rad i + $r\times$rad j) (rad i = $r\times$rad i) (byt rad i och rad j)

Vi har

$$\det E_A = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det E_S = r\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\det E_B = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Detsamma kommer gälla för $\mathbb{R}^{n\times n}$ då $n\geq 2$.

Sats 3.2.3

Om E beskriver en elementär radoperation så är $\det EA = \det E \det A = \alpha \det A$,

där α har värdet -1, 1 eller r beroende på vilken typ av radoperation.

Bevis:

Steg 1: verifiera detta för $n=2$, t.ex.

$$\det EA = \det \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} ra & rb \\ c & d \end{bmatrix} = rad - rbc = r\underbrace{(ad-bc)}_{=\det A}$$

Steg 2: Antag satsen för $n=k$ och betrakta $n=k+1$ (induktion).

forts. →

Bevis forts.

Expandera $\det EA$ längs en rad som inte påverkas av E (E rör bara två rader):

$$\det EA = \sum_{j=1}^{k+1} a_{ij} (-1)^{i+j} \det B_{ij}$$

där B_{ij} = matrisen vi får av att ta bort rad i och kolonn j från EA.

Men $B_{ij} = \tilde{E} A_{ij}$ där $\tilde{E}$ är samma typ av radoperation som E, fast för $k \times k$-matriser! (Se ex. på nästa sida.)

$\Rightarrow \det B_{ij} = \alpha \det A_{ij}$

$\Rightarrow \det EA = \alpha \det A = \det E \det A$.

Via induktion får vi att satsen håller för $n = 2, 3, \ldots$. $\square$

Ex.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

A "$E_A E_A A$" "$E_B E_A E_A A$"

$+2$ $+1$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = +15$$

Vi kan alltid reducera A till trappstegsform via en sekvens av radoperationer (utan omskalning):

$$E_p E_{p-1} \cdots E_1 A = U$$

$\Rightarrow \det A = (-1)^r \det U$, där r är antalet radbyten

Men U är övertriangulär, så

$$\Rightarrow \det A = (-1)^r \prod_{i=1}^{n} (U)_{ii}$$

$\boxed{\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n \quad \text{Jämför} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$

Ex. för beviset till Sats 3.2.3:

Låt $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ och låt oss byta rad 2 och 3. Vi kan skriva det som

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Vi får via kofaktorexpansion längs rad 1 att

$$\det(EA) = a\begin{vmatrix} h & i \\ e & f \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} g & i \\ d & f \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} g & h \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$= a B_{11} - b B_{12} + c B_{13}$$

Men på samma sätt är

$$\det A = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a A_{11} - b A_{12} + c A_{13}$$

Alltså har vi bytt rad 1 och 2 i A_{ij} för att få B_{ij}. Vi kan skriva detta som

$$B_{ij} = \tilde{E} A_{ij} \quad \text{där} \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poängen är att $\tilde{E}$ motsvarar ett radbyte för 2×2-matriser och E är radbyte för 3×3-matriser.

Eftersom $(U)_{ii} \neq 0$ för alla i omm A är inverterbar får vi

Sats 3.2.4 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inv. $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

På liknande sätt får vi

Sats 3.2.6 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Bevis:

Om A eller B är singulär så är även AB det,

dvs. $\det A = \det B = \det(AB) = 0$

Antag A inv. Då är $A \sim I_n$.

$\Rightarrow A = E_1^{-1} \cdots E_p^{-1} I_n$

$$\Rightarrow |AB| = |E_1^{-1} \cdots E_p^{-1} B| \overset{\text{Sats 3.2.3.}}{=} |E_1^{-1}| \cdots |E_p^{-1}||B| \overset{\text{Sats 3.2.3.}}{=} |E_1^{-1} \cdots E_p^{-1}||B| = |A||B|. \quad \square$$

$(|A| = \det A)$

Från Sats 3.2.6 följer

Sats Låt $A = LU$ vara en LU-faktorisering av $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Då är

$$\det A = \det U = \prod_{i=1}^{n} (U)_{ii}.$$

Bevis:

L och U är triangulära och L har värdet 1 på diagonalen. $\square$

Se Lay för:

Sats 3.2.5 $\det A^T = \det A$.

Cramers regel

Via determinanter kan vi beskriva lösningen till ett L.E.S. genom en explicit formel. Detta används inte för "vanliga" beräkningar men för teoretiska argument.

Låt $\underbrace{A}_{=[a_1 \cdots a_n]} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ och $b \in \mathbb{R}^n$. Vi definierar matrisen

$$A_i(b) = [a_1 \cdots a_{i-1} \; b \; a_{i+1} \cdots a_n]$$

dvs. vi byter ut kolonn i mot b. Då har vi

Sats 3.3.7 (Cramers regel) Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vara inv. Givet $b \in \mathbb{R}^n$ så ges lösningen $x = (x_1, \dots, x_n)$ till $Ax = b$ av

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Bevis:

Låt
$$I_i(x) = \begin{array}{c} \text{kolonn } i \\ \left[e_1 \cdots \; x \; \cdots e_n\right] \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & x_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & x_n & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observera att
$$\det I_i(x) = x_i \det I_{n-1} = x_i$$

(expandera via rad i).

Men
$$A I_i(x) = [\underbrace{Ae_1}_{=a_1} \cdots \underbrace{Ax}_{=b} \cdots \underbrace{Ae_n}_{=a_n}] = A_i(b),$$

så
$$\det A \underbrace{\det I_i(x)}_{x_i} = \det A_i(b). \qquad \square$$

Ex.

I envariabelanalys använde ni Laplace-transformen $\mathcal{L}$ för att lösa system av ODE.

T.ex. transformerar $\mathcal{L}$ systemet

fort. >

Ex. forts.

$$\begin{cases} 3y'(t) - 2z(t) = 0, & y(0) = 1 \\ z'(t) - 6y(t) = 0, & z(0) = 1 \end{cases} \quad \text{till}$$

$$\begin{cases} 3sY(s) - 3y(0) - 2Z(s) = 0 \\ sZ(s) - z(0) - 6Y(s) = 0. \end{cases}$$

Men detta är ett L.E.S. för $x_1 = Y(s)$, $x_2 = Z(s)$:

$$\begin{cases} 3s\,x_1 - 2x_2 = 3 \\ -6x_1 + s x_2 = 1 \end{cases}, \text{ dvs. } Ax = b \text{ där}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{bmatrix} \text{ och } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Vi har}$$

$$A_1(b) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \text{ och } A_2 = \begin{bmatrix} 3s & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \text{ så}$$

via Cramers regel får vi

$$Y(s) = x_1 = \frac{\det A_1(b)}{\det A} = \frac{3s+2}{3(s+2)(s-2)}$$

$$Z(s) = x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{3s+18}{3(s+2)(s-2)} = \frac{s+6}{(s+2)(s-2)}$$

Detta ger efter "bakåttransformation",

$$y(t) = \cosh(2t) + \tfrac{1}{3}\sinh(2t)$$

$$z(t) = \cosh(2t) + 3\sinh(2t).$$

Sätt in och kolla att det stämmer!

Testa också att radreducera $[A\ b]$: lite krångligt p.g.a. s.

$\longrightarrow$

Formel för A^{-1}

Via Cramers regel kan vi invertera A genom att beräkna en kolonn i taget.

($AA^{-1} = I$, så $A\,\mathrm{col}_j(A^{-1}) = e_j$)

Vi får
$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\det A_i(e_j)}{\det A}.$$

Expandera nu $\det A_i(e_j)$ längs kolonn i, dvs. e_j:
(ta bort rad j och kolonn i)

$$\boxed{(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\det A_{ji}}{\det A} = \frac{C_{ji}}{\det A}}$$

OBS: omvänd ordning!

Def. Om $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kallar vi matrisen

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ C_{1n} & & & C_{nn} \end{bmatrix}$$

OBS: "omvänd indexering"

adjunkten till A, alt. den adjungerade matrisen.

Vi har visat

Sats 3.3.8 Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vara inv.

Då är $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$.

Man måste känna till Sats 3.3.7 och 3.3.8 då de dyker upp i många teoretiska sammanhang, men vi kommer inte använda dem för att lösa "vanliga" L.E.S. eller beräkna A^{-1} – för detta radreducerar vi.