

IDAG: Diagonalisering av matriser

- Mål:
- Faktorisera A via egenvektorer
 - Lösa system av ODEs enklare

Def. Två matriser A och B är similära om det finns en inv. matris P så att

$$A = PBP^{-1}. \text{ Avbildningen } A \mapsto P^{-1}AP (=B)$$

kallas en similaritets transformation.

Sats 5.3.4 Två similära matriser har samma egenvärden, med samma algebraiska multiplicitet.

Beris: Vi visar att de har samma karakteristiska ekvation:

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow A - \lambda I = PBP^{-1} - \lambda PP^{-1} = P(B - \lambda I)P^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det P \cdot \det(B - \lambda I) \cdot \det(P^{-1})$$

$$= \det(\underbrace{PP^{-1}}_{=I}) \det(B - \lambda I)$$

$$= \det(B - \lambda I). \quad \square$$

Def. A är diagonaliserbar om A är similär med en diagonal matris, dvs. $A = PDP^{-1}$ med D diagonal och P inv.

Detta är t.ex. bra för beräkning av A^k då k är stort, då \longrightarrow

$$A^2 = \underbrace{PDP^{-1}PDP^{-1}}_{=I} = PD^2P^{-1}, \text{ så}$$

$$\underline{A^k = PD^kP^{-1}}, \text{ och om } D = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{så är } D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & & & \\ & d_{22}^k & & \\ & & \dots & \\ & & & d_{nn}^k \end{bmatrix}.$$

Många matriser är diagonaliserbara. T.ex.:

Sats 7.1.2 (Senare i kursen!)

Om $A=A^T$ är A diagonaliserbar.

I detta fall har vi en bas av egenvektorer

till A :

Sats 5.3.5 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är diagonaliserbar om

A har n lin.ober. egenvektorer. I så fall är

$A = PDP^{-1}$ där kolonnerna i P är dessa egenvektorer

och D är diagonal med motsvarande egenvärden.

Bevis: Låt $P = [v_1 \dots v_n]$ och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Om $\{v_1, \dots, v_n\}$ är lin.ober. med egenvärden $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

så är P inv. och $AP = [\lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n] = PD$,

dvs. $A = PDP^{-1}$.

Omvänt, om $A = PDP^{-1}$ får vi att $AP = PD$, dvs.

$Av_i = \text{col}_i(AP) = \text{col}_i(PD) = \lambda_i v_i$, så $\{v_1, \dots, v_n\}$

är egenvektorer. De är lin.ober. då P är inv. \square

Vi visade i F11 att A har n lin.ober.

om A har n distinkta egenvärden. Alltså:

Sats 5.3.6 Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ har n distinkta egenvärden så är A diagonaliserbar.

Det som är viktigt är dock att de samlade egenrummen spänner upp hela \mathbb{R}^n . Detta är en del av Sats 5.3.7 [Läs i Lay!].

Sats 5.3.7' Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha $r \leq n$ distinkta

egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Låt E_k vara egenrummet

för λ_k . Om $\sum_{k=1}^r \dim E_k = n$ så är A

diagonaliserbar. (utan bevis.)

Praktisk procedur (för $n \leq 3$)

För att diagonalisera $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gör vi alltså följande:

I. Hitta egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ till A via
 $0 = \det(A - \lambda I)$.

II. För varje λ_k , bestäm en bas för dess egenrum E_k : $B_k = \{v_1^k, v_2^k, \dots, v_{n_k}^k\}$.

Detta ger $\dim E_k = \#(B_k) = n_k$.

Om $\sum_{k=1}^r \dim E_k < n$ är A inte diag. Annars:

III. Bilda $P = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \end{bmatrix}$

OBS: Blocknotation! B_k innehåller vektorerna $v_1^k, \dots, v_{n_k}^k$.

IV. Bilda

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n I_{n_r} \end{bmatrix}$$

där $n_k = \dim E_k$, dvs. upprepa λ_k lika många gånger som dimensionen av E_k ; t.ex. $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \lambda_3 & \\ & & & & & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

V. Kontrollera att $AP = PD!$

Sats 5.3.7 garanterar att P inv. om allt gjorts rätt.

Ex. $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 16 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

I. $\det(A - \lambda I) = (-3 - \lambda)(3 - \lambda)^2 = 0$
 $\Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3$

II. $(A - \lambda_1 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_2 + 16x_3 = 0 \\ 6x_2 = 0 \\ 6x_3 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

så $E_1 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ och $\dim E_1 = 1$.

$$(A - \lambda_2 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6x_1 - 2x_2 + 16x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = x_2 \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 8/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så $E_2 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ och $\dim E_2 = 2$.

(1+2=3, så
fortsätt!)

III. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Notera lin.ober. kolonner, \Rightarrow inv.)

$$\textcircled{\text{IV}} \quad D = \begin{bmatrix} -3I_1 & & \\ & 3I_2 & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\textcircled{\text{V}}$ $AP = PD$: Kontrollera själva!
Lätt att göra fel.

Applikation: System av ODEs

I F11 tittade vi på explicit Euler för

$$x'(t) = Ax(t), \text{ som gav iterationen } x_{k+1} = x_k + hAx_k$$

Men vi kan också betrakta $x'(t) = Ax(t)$ direkt.

Här är $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, så $x(t) \in \mathbb{R}^n$ men $x \in V$ →

→ där $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ är deriverbar}\}$.

Låt $U = \{x \in V \mid x'(t) = Ax(t), t \in \mathbb{R}\}$ vara

mängden av alla lösningar. U är ett underrum

till V då t.ex. $x+y \in U$ om $x, y \in U$, eftersom

$$(x+y)'(t) = x'(t) + y'(t) = Ax(t) + Ay(t) = A(x+y)(t).$$

Man kan visa att $\boxed{\dim U = n}$ (se sista sidan)

dvs. en bas för U ges av n st. lin. ober.

lösningar b_1, \dots, b_n . Alla lösningar fås sen

$$\text{via } x(t) = c_1 b_1(t) + \dots + c_n b_n(t).$$

Vi vill nu hitta en sådan bas.

Lösningen till $x'(t) = \lambda x(t)$ är $x(t) = C e^{\lambda t}$,

$x(t) \in \mathbb{R}$

och lösningen till $x'(t) = D x(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} x(t)$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$

är $x_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}$.

$x' = D x$ är alltså mycket lättare att lösa än $x' = A x$ (vi har ju redan löst det), så en idé är att konvertera $x' = A x$ till $x' = D x$, lösa, och konvertera tillbaka. Detta går om A är diagonaliserbar!

Låt A ha n lin. ober. egenvektorer $\{v_k\}_{k=1}^n$.

$P = [v_1 \dots v_n]$ och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ så att

$$A = P D P^{-1}.$$

Gör variabelbytet $y(t) = P^{-1} x(t)$, dvs. $x(t) = P y(t)$.

$$\Rightarrow P y'(t) = \frac{d}{dt} (P y(t)) = \frac{d}{dt} (x(t)) = A x(t)$$

$$= P D P^{-1} x(t) = P D y(t)$$

mult. med P^{-1}

$$\Rightarrow y'(t) = D y(t)$$

Nu vet vi att $y_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}$.

Transformera tillbaka för att få $x(t)$:

$$x(t) = P y(t) = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n v_n e^{\lambda_n t}.$$

Detta är alla lösningar till $x'(t) = A x(t)$.

Bestäm C_k genom att sätta in givna initialvärden, t.ex. $x(0)$.

Extra 1 (för intresserade)

Vi kan skriva lösningen till $x'(t) = D x(t)$ på 12.6

Som $x(t) = e^{tD} C = e^{tD} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ där

$$e^{tD} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} \quad \text{eftersom} \quad D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Man kan även definiera e^{tA} på detta sätt

för alla matriser A . Serien konvergerar alltid

och vi kallar e^{tA} matrisexponentialen för tA .

Det gäller att $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$
 derivatan av en matris!
 en matris-värd funktion!

och $\frac{d}{dt} e^{tA} x = A e^{tA} x$
 derivatan av en vektor-värd funktion!

så $x(t) = e^{tA} x_0$ är den allmänna lösningen till

$$x'(t) = A x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Extra 2, bevis för $\dim U = n$

Låt $x_1, \dots, x_p \in U$. Då betyder

$$c_1 x_1 + \dots + c_p x_p = 0 \quad \text{att} \quad c_1 x_1(t) + \dots + c_p x_p(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

dvs. $\{x_1, \dots, x_p\}$ lin. ober. i $U \Rightarrow \{x_1(t), \dots, x_p(t)\}$ lin. ober. i \mathbb{R}^n

för alla t . Alltså har vi $\dim U \leq p \leq n$.

Genom varje punkt i \mathbb{R}^n går en lösning till $x' = Ax$,

så välj n st. lin. ober $z_k \in \mathbb{R}^n$: detta ger n lösningar

$x_k \in U$ med (t.ex.) $x_k(0) = z_k$. Dessa är lin. ober., ty

om de inte var det skulle $\{z_k\}$ vara lin. ber. Alltså

behöver vi minst n lösningar för att spänna upp U : $\dim U \geq n$.