IDAG: Linjära avbildningar

Mål: • Generalisera standardmatrisen till olika baser (specifikt av egenvektorer)

• Se hur man numeriskt kan beräkna egenvärden

Om $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär vet vi att det finns ett $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ så att

$$T(x) = Ax \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Detta är uttryckt i <u>standardbaserna</u> för $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$.

Antag istället att vi har $T: V \to W$ (linjär) med baserna $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ för V och $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ för W.

Vi kan identifiera V med $\mathbb{R}^n$ och W med $\mathbb{R}^m$ via t.ex.

$$x = P_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}, \quad x \in V, [x]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n \text{ och } P_{\mathcal{B}}: \mathbb{R}^n \to V$$

<u>koordinatavbildningen</u>. (Om $b_i \in \mathbb{R}^k$ så är $P_{\mathcal{B}} = [b_1 \cdots b_n] \in \mathbb{R}^{k\times n}$)

Vi vill uttrycka x och $T(x)$ i $\mathcal{B}$- och $\mathcal{C}$-koordinater då vi inte har några "standardkoordinater" för V och W:

Om $[x]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)$ får vi

$$T(x) = T(x_1 b_1 + \dots + x_n b_n) \underset{T \text{ lin.}}{=} x_1 T(b_1) + \dots + x_n T(b_n), \text{ så}$$

$$[T(x)]_{\mathcal{C}} \underset{x \mapsto [x]_{\mathcal{C}} \text{ lin.}}{=} x_1 [T(b_1)]_{\mathcal{C}} + \dots + x_n [T(b_n)]_{\mathcal{C}} = \Big[[T(b_1)]_{\mathcal{C}} \cdots [T(b_n)]_{\mathcal{C}} \Big] [x]_{\mathcal{B}}$$

Så $[T(x)]_C = M[x]_B$ där $M = \big[[T(b_1)]_C \cdots [T(b_n)]_C \big]$

Vi kallar M <u>matrisen</u> <u>för T relativt baserna B, C</u>

Dvs.
$$V \ni x \longrightarrow T(x) \in W \quad \text{motsvaras av}$$
$$\mathbb{R}^n \ni [x]_B \longrightarrow M[x]_B = [T(x)]_C \in \mathbb{R}^m .$$

<u>Ex.</u> Låt $\mathbb{P}^n = \{ p \mid p(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n \}$

vara mängden av alla polynom av grad n. $\mathbb{P}^n$ är ett vektorrum. En bas för $\mathbb{P}^n$ ges av

$$B^n = \{ b_0, b_1, \ldots, b_n \} = \{ 1, t, t^2, \ldots, t^n \} \quad (\text{dvs. } b_k(t) = t^k),$$

eftersom $b_0, \ldots, b_n$ lin.ober.: Antag $c_0 b_0 + \cdots + c_n b_n = 0$

$\Rightarrow c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n = 0$ för <u>alla t</u>

Men polynom av grad n har max. n nollställen...
$\Rightarrow c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0.$

Låt $T : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n-1}$, $(Tp)(t) = c_1 + 2c_2 t + \cdots + n c_n t^{n-1}$

dvs. T är första-derivatan. Vad är dess matris relativt baserna B^n, B^{n-1}?

Vi har

$$(Tb_0)(t) = 0 \Rightarrow [Tb_0]_{B^{n-1}} = (0, 0, \ldots, 0)$$
$$(Tb_1)(t) = 1 \Rightarrow [Tb_1]_{B^{n-1}} = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$(Tb_k)(t) = k t^{k-1} \Rightarrow [Tb_k]_{B^{n-1}} = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{plats } k-1}}{k}, 0, \ldots, 0)$$

så med t.ex. $n = 3$ har vi

$$M = \big[[Tb_0]_{B^2} \cdots [Tb_3]_{B^2} \big] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

<u>Specialfall</u>

$$\boxed{\text{Om } V = \mathbb{R}^n \text{ och } W = \mathbb{R}^m \text{ med } \underline{\text{standardbaserna}} \text{ så är } M \text{ standardmatrisen för } T:\ T(x) = Mx.}$$

Om $T: V \to V$ och $\mathcal{B}$ är en bas för V kallar vi M matrisen för T relativt $\mathcal{B}$, eller $\mathcal{B}$-matrisen för T. Skrivs $[T]_{\mathcal{B}}$: $[T(x)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$

Om $V = \mathbb{R}^n$ och $W = \mathbb{R}^n$ med baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$, och $T(x) = x$ så är M basbytesmatrisen $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$: $[x]_{\mathcal{C}} = [T(x)]_{\mathcal{C}} = M[x]_{\mathcal{B}}$.

Koppling till diagonalisering

Antag att $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ges av $T(x) = Ax$, där A är diagonaliserbar. $\Rightarrow A = PDP^{-1}$, med $P = [b_1 \cdots b_n]$ och $\{b_1, \dots, b_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ av egenvektorer till A.

Sats 5.4.8 I $\mathcal{B}$-koordinater ges T av en diagonal matris, nämligen $[T]_{\mathcal{B}} = D$.

Bevis: Vi vet $P[x]_{\mathcal{B}} = x$, så $[x]_{\mathcal{B}} = P^{-1}x$.

Men då är

$$
\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B}} &= \big[[T(b_1)]_{\mathcal{B}} \cdots [T(b_n)]_{\mathcal{B}} \big] \\
&= \big[[Ab_1]_{\mathcal{B}} \cdots [Ab_n]_{\mathcal{B}} \big] \\
&= \big[[\lambda_1 b_1]_{\mathcal{B}} \cdots [\lambda_n b_n]_{\mathcal{B}} \big] \\
&= \big[\lambda_1 e_1 \cdots \lambda_n e_n \big] = D. \quad \square
\end{aligned}
$$

(Lite annorlunda bevis i Lay.)

Detta motsvaras av att vi gör variabelbytet $y = P^{-1}x$.

I basen $\mathcal{B}$ är T lättare att arbeta med.

Ex. (Lay) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $x \mapsto \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} x$.

Vi vill hitta en bas där T istället ges av en diagonalmatris.

Diagonalisera A:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (7-\lambda)(1-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 8\lambda + 15$$
$$= (\lambda - 4)^2 - 1$$

så $\lambda = 3$ eller $\lambda = 5$.

Egenrum för $\lambda = 3$: $\left\{ b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$, $\lambda = 5$: $\left\{ b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

så $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (notera omvänd ordning i Lay)

$\Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ om $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Kontroll: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \end{bmatrix}$

$[x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[T(x)]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} [x]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$T(x) = P \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \end{bmatrix} = Ax$.

Generalisering:

$$\boxed{\text{Om } A = PCP^{-1} \text{ (dvs. } A \text{ och } C \text{ är similära) så är } [T]_B = C \text{ om } B \text{ är basen som ges av kolonnerna i } P.}$$

Bestämma egenvärden numeriskt

Det går inte att lösa $\det(A-\lambda I)=0$ exakt

då $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ med $n \geq 5$ (med ändligt antal operationer)

eftersom $\det(A-\lambda I)$ är ett polynom av grad n.

Vad gör vi då? Approximera!

Idé: Hitta en sekvens $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}^n$ som

närmar sig en egenvektor v: $Av = \lambda v$.

Dvs. $Ax_k \approx \lambda x_k$, och vi får en

approximation till λ genom att beräkna

Rayleigh-kvoten $\dfrac{x_k^T A x_k}{x_k^T x_k} \approx \dfrac{v^T A v}{v^T v} = \dfrac{v^T \lambda v}{v^T v} = \lambda$.

Den enklaste metoden ges av potensiteration:

Ta ett godtyckligt $x \in \mathbb{R}^n$ och beräkna $x_k = A^k x$.

[MATLAB-DEMO] (som motiverar nedanstående)

Om A har egenvärden λ_k och motsvarande egenvektorer

v_k som bildar en bas för $\mathbb{R}^n$ så är

$$x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \quad \text{för några } c_k \text{, så}$$

$$x_k = A^k x = c_1 A^k v_1 + \cdots + c_n A^k v_n$$
$$= c_1 \lambda_1^k v_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n .$$

Om nu $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ får vi att

$$\frac{1}{\lambda_1^k} x_k = c_1 v_1 + c_2 \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}_{<1}^k v_2 + \cdots + c_n \underbrace{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)}_{<1}^k v_n \longrightarrow c_1 v_1 \text{ då } k \to \infty,$$

$\longrightarrow$

så $\frac{1}{\lambda_1^k} x_k \to$ en egenvektor motsvarande λ_1

Vi får en approx. till A:s <u>största</u> egenvärde!

I praktiken räknar vi ut $\frac{1}{\frac{x_k^T A x_k}{x_k^T x_k}} x_k$

då vi inte vet λ_1.

Vi kan modifiera proceduren för att få andra egenvärden än λ_1.

Beräkna istället $x_k = (A - \alpha I)^{-k} x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Om $Av_j = \lambda_j v_j$ så är $(A - \alpha I) v_j = (\lambda_j - \alpha) v_j$

dvs. $(A - \alpha I)^{-1} v_j = \frac{1}{\lambda_j - \alpha} v_j$

Om $\lambda_j \approx \alpha$ blir $\frac{1}{\lambda_j - \alpha}$ stort, så $x_k \to v_j$, $k \to \infty$,

och vi hittar egenvärdet λ_j istället för λ_1.

[MATLAB-DEMO]

Att dessa metoder verkligen fungerar, och bättre metoder som t.ex. QR-metoden, ser ni i kurser om <u>numerisk analys</u>.